Toppersnotes®
Unleash the topper in you

बिहार माध्यमिक शिक्षक

विषय : गणित

बिहार लोक सेवा आयोग

भाग - 3

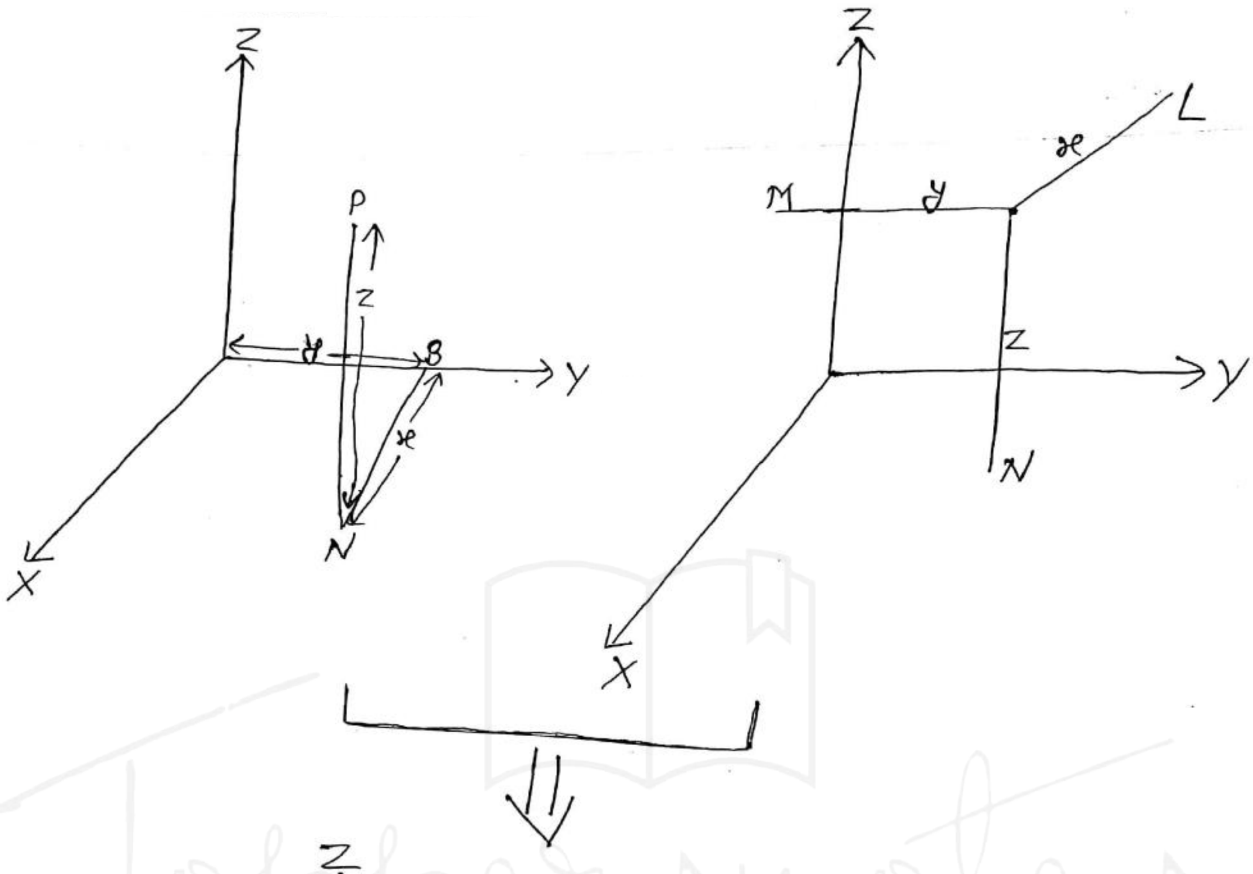
SIERRA INNOVATIONS

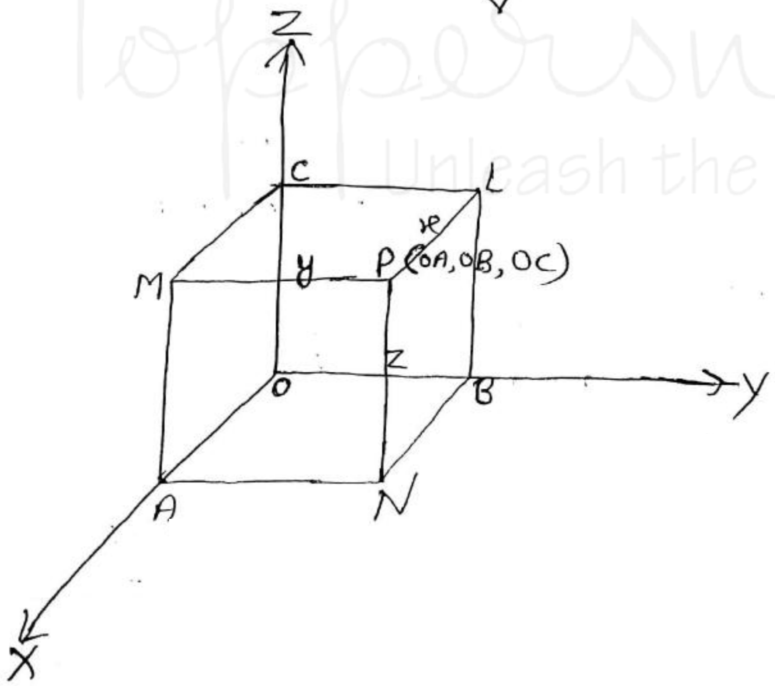
बिहार माध्यमिक शिक्षक

विषय : गणित

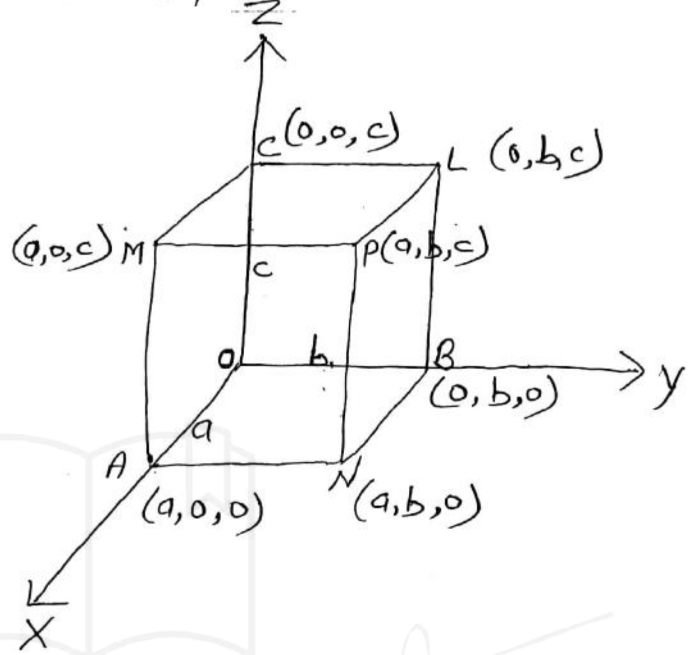
भाग - 3

Three Dimensional Geometry





Q.) चित्र में दर्शायी आयतफलक की भुजाओं OA, OB & OC की लं. a, b, c है। O पर मूल बिन्दु है। then सभी शीर्षों के निर्देशांक लिखो।



Q.) बिन्दु P (a,b,c) से —

i) x-Axis ii) y-Axis

iii) Z-Axis iv) X-Y-plane

v) YZ-plane vi) ZX-plane पर

डाले गये लम्बों के पादों के निर्देशांक = ?

Sol.

xy-plane = N (a,b,0)

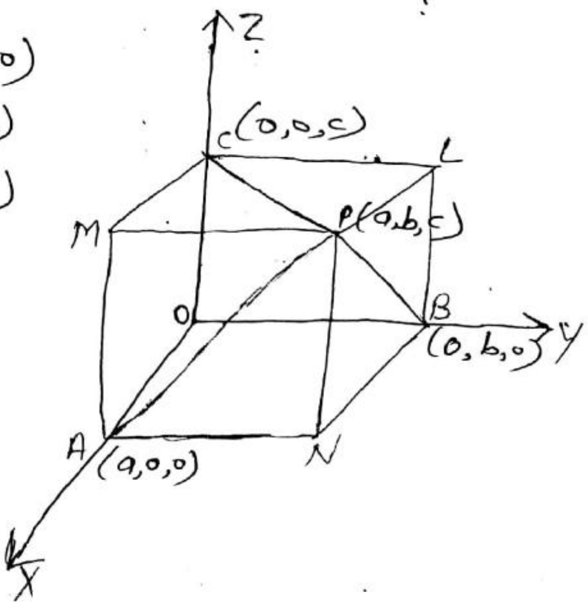
yz-plane = L (0,b,c)

zx-plane = M (a,0,c)

X-Axis ⇒ A (a,0,0)

Y-Axis ⇒ B(0,b,0)

Z-Axis ⇒ C(0,0,c)



Q.] ~~बिन्दु~~ p (a,b,c) ~~से~~ का-

i) X - Axis ii) Y- Axis

iii) Z-Axis iv) XY-plane

v) YZ- plane vi) Zx-plane से

लम्बवत दूरी ज्ञात करो।

Sol^n XY-तल पर लम्ब ⇒

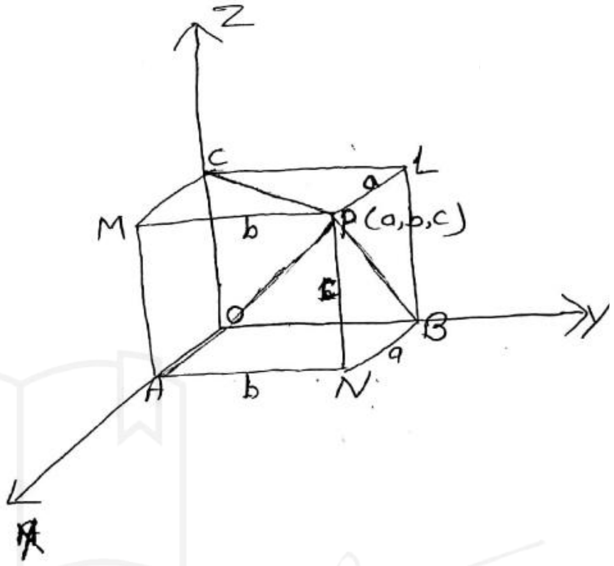
$PN = c$

YZ-तल पर लम्ब ⇒

$PL = a$

ZX-तल पर लम्ब ⇒

$PM = b$



X-Axis पर लम्ब ⇒

$PA = \sqrt{b^2+c^2}$

Y-Axis पर लम्ब ⇒

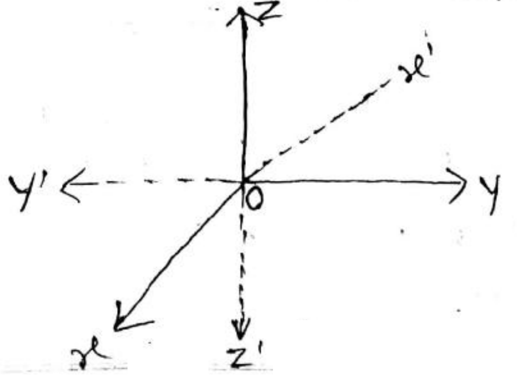
$PB = \sqrt{a^2+c^2}$

Z-Axis पर लम्ब ⇒

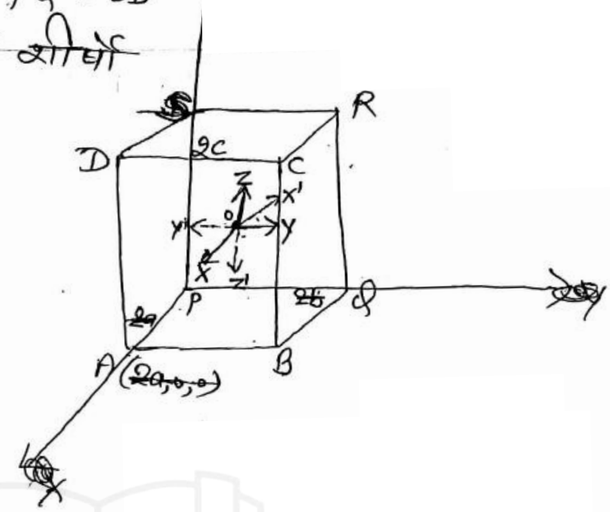
$PC = \sqrt{a^2+b^2}$

अष्टांशकों में निर्देशांकों के चिन्ह ⇒

	Oxyz	Ox'yz	Oxy'z	Oxyz'	Ox'y'z	Ox'y'z'	Oxy'z'	Ox'y'z'
x	x	−x	x	x	−x	−x	x	−x
y	y	y	−y	y	−y	y	−y	−y
z	z	z	z	−z	z	−z	−z	−z



Q.) चित्र में दर्शायी आयतफलकी ABCD, PQRS का केन्द्र मूल point पर है। & निर्देशी अक्ष दर्शाये अनुसार है— तथा $PA = 2a$, $PQ = 2b$
$PS = 2c$ हो then सभी शीर्षों के निर्देशांक = ?



Sol.ⁿ $A(a, -b, -c)$

$B(a, b, -c)$

$C(a, b, c)$

$D(a, -b, c)$

$P(-a, -b, -c)$

$Q(-a, b, -c)$

$R(-a, b, c)$

$S(-a, -b, c)$

☆ **दूरी सूत्र** :⇒ दो बिन्दुओं में $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ के मध्य दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

$$\left(OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right)$$

☆ **विभाजन सूत्र** :⇒

$$P \underset{m:n}{\overset{R}{\longrightarrow}} \overset{Q}{\longrightarrow} \underset{m:n}{S}$$

$$R\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

$$S\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

• PQ पर किसी point के निर्देशांक ⇒

$$\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right) \quad ; \lambda \neq -1$$

PQ का मध्य बिन्दु ⇒

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Result ⇒ यदि बिन्दुओं $p(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड का समी. ⇒ $[Ax+By+cz+D=0]$, $\lambda:1$ के अनुपात में विभाजित करती हो then

$$\boxed{\lambda = -\left(\frac{Ax_1+By_1+cz_1+D}{Ax_2+By_2+cz_2+D}\right)}$$

☆ points $p(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को—

(i) xy-तल किस अनुपात में विभाजित करता है ? ⇒ $-z_1 : z_2$

(ii) yz-तल ⇒ $-x_1 : x_2$

(iii) zx-तल ⇒ $-y_1 : y_2$

Q.28) ∵ given ⇒ $p(1,3,2)$, $Q(-3,1,-2)$
& plane $= 3x-2y+z+4=0$ —(1)

$$\because \lambda = -\left(\frac{Ax_1+By_1+cz_1+D}{Ax_2+By_2+cz_2+D}\right)$$

$$= -\left(\frac{3-6+2+4}{-9-2-2+4}\right) \Rightarrow \frac{3}{9}$$

$$\Rightarrow 1:3$$

Q.) points $p(1,3,2)$, $Q(-3,1,-2)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को (i) xy-तल किस अनुपात में devide = ?

$-z_1 : z_2$

$\Rightarrow -2 : -2$

(ii) YZ- तल $\Rightarrow$ $-x_1 : x_2$

$\Rightarrow -1 : (-3) = 1:3$

(iii) ZX- तल $\Rightarrow$ $-y_1 : y_2$

$\Rightarrow -3:1$

☆ निर्देशी समतलों मे point का प्रतिबिम्ब :$\Rightarrow$

point $P(x_1, y_1, z_1)$ का

(i) XY- तल में प्रतिबिम्ब

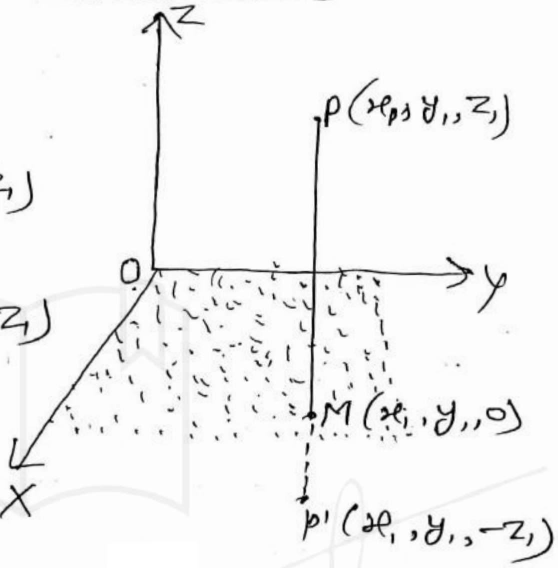
$P_1(x_1, y_1, -z_1)$

(ii) YZ- तल में प्रतिबिम्ब

$P_2(-x_1, y_1, z_1)$

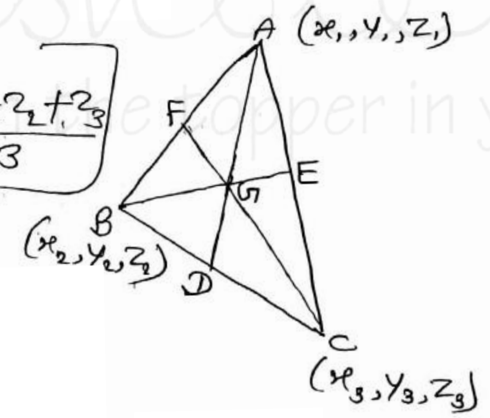
(iii) ZX- तल में प्रतिबिम्ब

$P_3(x_1, -y_1, z_1)$



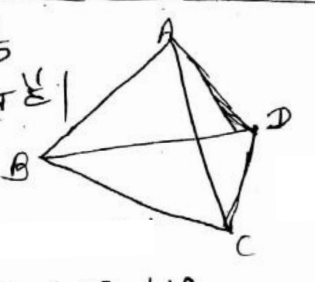
☆ त्रिभुज का केन्द्रक :$\Rightarrow$

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

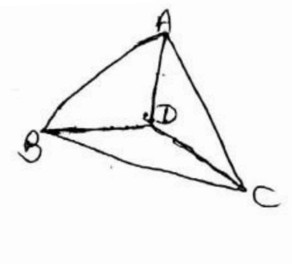


☆ चतुष्फलक का केन्द्रक :$\Rightarrow$

यदि D, ΔABC के ऊपर स्थित है।



या

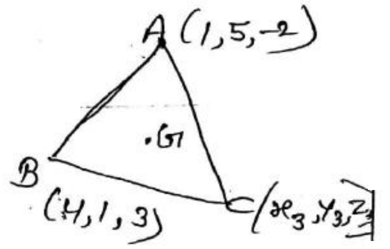


$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

Q.16) $\because$ given:- Δ के ~~केन्द्रक~~ $= \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Δ के दो शीर्ष $= A(1,5,-2)$, $B(4,1,3)$

Solⁿ $G\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$



$\because \dfrac{4+1+x_3}{3} = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{x_3 = 1-5 = -4}$

$\dfrac{5+1+y_3}{3} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \boxed{y_3 = -2}$

$\dfrac{-2+3+z_3}{3} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \boxed{z_3 = 3}$

Q. 20) $\because \Delta ABC$ समबाहु है।

$\therefore$ परिकेन्द्र = केन्द्रक

$= \left(\dfrac{3+2+1}{3}, \dfrac{2+1+3}{3}, \dfrac{1+3+2}{3}\right)$

$= (2, 2, 2)$

Q.12) Let वह point $p(x, y, z)$ है।

p की yz-तल से दूरी $= p$ की x-Axis से दूरी

$\Rightarrow |x| = \sqrt{y^2+z^2}$

$\Rightarrow \boxed{x^2-y^2-z^2=0}$

Q.13) Let $p(h,k,l)$ दिये चारों points से समान दूरी पर है।

$\therefore PO = PA$, $PO = PB$, $PO = PC$

विकल्पों से- $p(2,1,3)$

OR $\Rightarrow h^2+k^2+l^2 = (h-4)^2+k^2+l^2$

$\boxed{h=2}$ $\boxed{k=1}$

$\boxed{l=3}$

Q.17) $h = a,\ k = b,\ l = c$

$\therefore P(a, b, c)$

~~&~~ Radius $\Rightarrow OP$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Q.18) $AB = BC = CA$

$\therefore$ Δ समबाहु है।

अतः Δ का लम्बकेन्द्र = केन्द्रक

$= \left(\frac{l+m+n}{3}, \frac{m+n+l}{3}, \frac{n+l+m}{3}\right)$

$= \left(\frac{3r}{3}, \frac{3r}{3}, \frac{3r}{3}\right)$

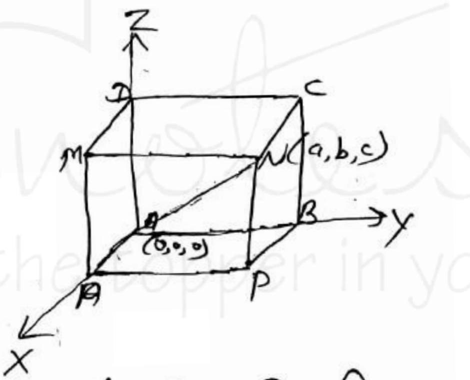
$= (r, r, r)$

Q.24) $OA = a;\ OB = b,\ OC = c$

Then आयतन $= abc$

$= 2 \times 4 \times 7$

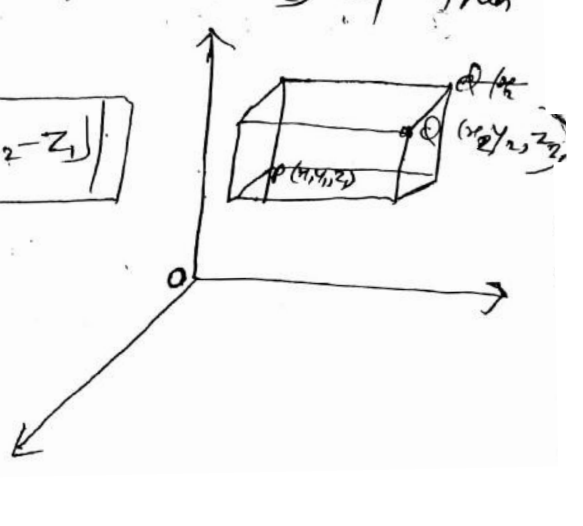
$= 56$



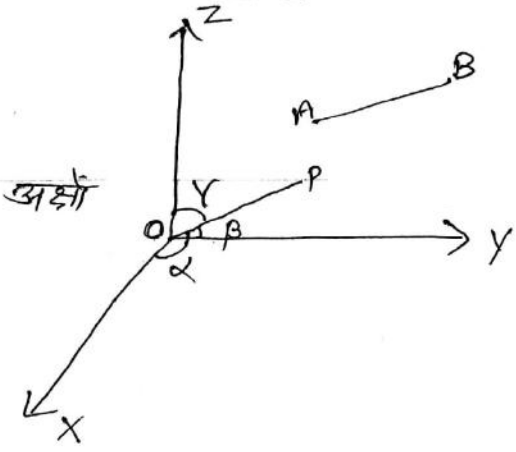
Q.24(a)) एक ~~आयतकार्मी फलकों~~ के ~~सिरे~~ विकर्ण के सिरे $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं। then

Volume = ?

$$\boxed{\text{Volume} = \left|(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_2-z_1)\right|}$$



☆ रेखा की दिककोज्याएँ व दिक अनुपात ⇒



रेखा AB की दिककोज्याएँ ⇒

∵ AB व OP समान्तर हैं।

∴ AB & OP द्वारा निर्देशी अक्षों से बने कोण समान होंगे।

∴ AB की दि. को. ⇒

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

या l, m, n

Ex:- i) X-Axis की दिककोज्याएँ ⇒

$\cos 0°, \cos 90°, \cos 90°$

या $1, 0, 0$

ii) X-Axis के समान्तर किसी रेखा की दि. को. ⇒

⇒ $1, 0, 0$

iii) Y-Axis की दि. को. ⇒ $0, 1, 0$

iv) Z-Axis की दि. को. ⇒ $0, 0, 1$

⇒ $\boxed{\text{यदि किसी रेखा AB की दि. को. } l, m, n \text{ हो then} \Rightarrow l^2+m^2+n^2=1}$

prove ⇒ Let $l = \cos\alpha$

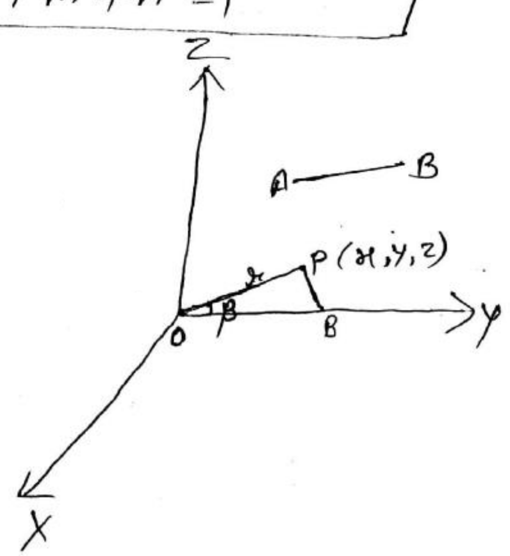
$m = \cos\beta$

$n = \cos\gamma$

let $OP \parallel AB$

& $OP = r$

& $P(x, y, z)$



P से OY पर लम्ब = PB

ΔOPB में ⇒ $\cos\beta = \dfrac{OB}{OP}$

$\Rightarrow \boxed{y = rm}$

इसी प्रकार $\boxed{x = rl}$

$\boxed{z = rn}$

इन्हें वर्ग करके जोड़ने पर –

$x^2+y^2+z^2 = r^2(l^2+m^2+n^2)$

$\Rightarrow r^2 = r^2(l^2+m^2+n^2)$

$\Rightarrow \boxed{l^2+m^2+n^2 = 1}$

H.P.

☆ यदि मूल point से जाने वाली रेखा op की दि.को. l, m, n & $op = r$ हो then p के निर्देशांक

$\Rightarrow \boxed{p(rl, rm, rn)}$

दिक्‌अनुपात $\Rightarrow$ यदि एक रेखा AB की दि.को. l, m, n हो then 3 संख्याएँ a, b, c इस रेखा AB के दिक् अनुपात कहलाते हैं।

जबकि $l \propto a$, $m \propto b$, $n \propto c$

अर्थात $\boxed{\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}}$ हो।

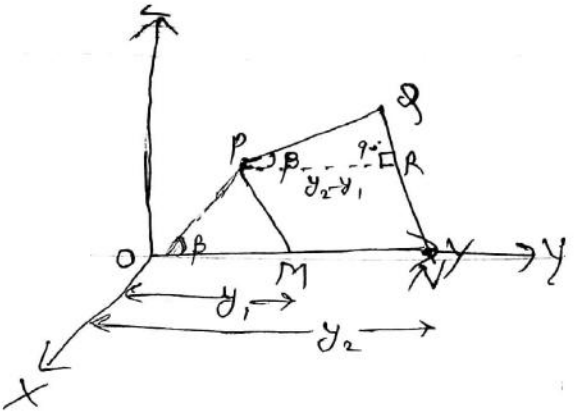
या $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\Rightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma a^2}}$

$l = \frac{a}{\sqrt{\Sigma a^2}}$, $m = \frac{b}{\sqrt{\Sigma a^2}}$, $n = \frac{c}{\sqrt{\Sigma a^2}}$

☆ दो points को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनु. व दि. को. $\Rightarrow$ points $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा के d.c.s माना l, m, n हैं।

here $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$



ΔPRQ में-

$\cos\beta = \dfrac{PR}{PQ}$

$\Rightarrow m = \dfrac{y_2-y_1}{PQ}$

$\Rightarrow \dfrac{m}{y_2-y_1} = \dfrac{1}{PQ}$

इसी प्रकार-

$\dfrac{l}{x_2-x_1} = \dfrac{1}{PQ}$, $\dfrac{n}{z_2-z_1} = \dfrac{1}{PQ}$

Thus $\boxed{\dfrac{l}{x_2-x_1} = \dfrac{m}{y_2-y_1} = \dfrac{n}{z_2-z_1}}$

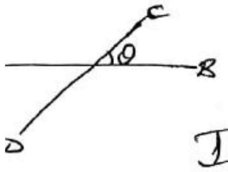
इस प्रकार दिक् अनुपात (d.r's) $\Rightarrow$

$\boxed{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1}$

& दिक् कोज्याएं (d.c.s) $\Rightarrow$

$\boxed{\dfrac{x_2-x_1}{PQ},\ \dfrac{y_2-y_1}{PQ},\ \dfrac{z_2-z_1}{PQ}}$

★ दो रेखाओं के मध्य कोण $\Rightarrow$ Let दो रेखाओं AB व CD की दि. को. क्रमशः l_1, m_1, n_1 व l_2, m_2, n_2 हैं। then इनके मध्य कोण निम्न प्रकार दिया जाता है-



$\boxed{\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}$

If $\theta = 90^\circ$ then $\boxed{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 1}$

If $\theta = 0^\circ$ then $\boxed{l_1 = l_2,\ m_1 = m_2,\ n_1 = n_2}$

★ यदि रेखाओं AB व CD के d.r.s क्रमशः a_1, b_1, c_1 व a_2, b_2, c_2 हो then $\Rightarrow$

12)

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

If $\theta = 0^\circ \Rightarrow \left[\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\right]$

If $\theta = 90^\circ \Rightarrow \left[a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0\right]$

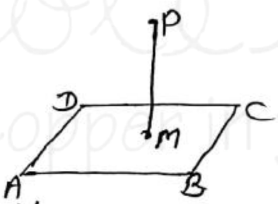
☆ प्रक्षेप (projection) :⇒

① एक ~~रेखा~~ बिन्दु का रेखा AB पर प्रक्षेप ⇒

point P का रेखा AB पर प्रक्षेप M होता है।
here M, point P से रेखा AB पर डाले गये लम्ब का पाद है।

② एक बिन्दु का समतल पर प्रक्षेप ⇒

point P का समतल ABCD पर प्रक्षेप M होता है।
here 'M' point P से समतल ABCD पर डाले गये लम्ब का पाद है।



Q.) point P (a, b, c) से –

i) X-Axis   iii) Z-Axis

ii) Y-Axis   iv) XY-समतल

v) YZ-समतल   vi) ZX-समतल पर

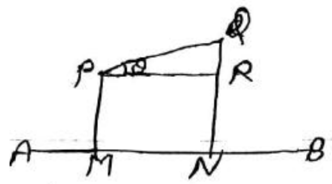
प्रक्षेप point ज्ञात करो।

Solⁿ–

X-Axis पर ⇒ $(a, 0, 0)$	XY-plane ⇒ $(a, b, 0)$
Y-Axis ⇒ $(0, b, 0)$	YZ-plane ⇒ $(0, b, c)$
Z-Axis ⇒ $(0, 0, c)$	ZX-plane ⇒ $(a, 0, c)$

③ रेखाखण्ड PQ का रेखा AB पर प्रक्षेप = MN

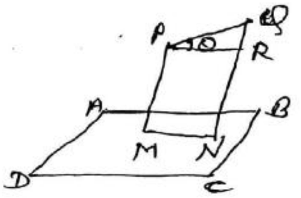
$= MN$
$= PR$
$= PQ \cos\theta$



④ रेखाखण्ड PQ का समतल ABCD पर प्रक्षेप =

$= MN$
$= PR$

$\boxed{\text{प्रक्षेप} = PQ \cos\theta}$



Q.) points $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड PQ के xy-तल पर प्रक्षेप की लं. = ?

Sol^n ⇒ $M(x_1, y_1, 0)$, $N(x_2, y_2, 0)$

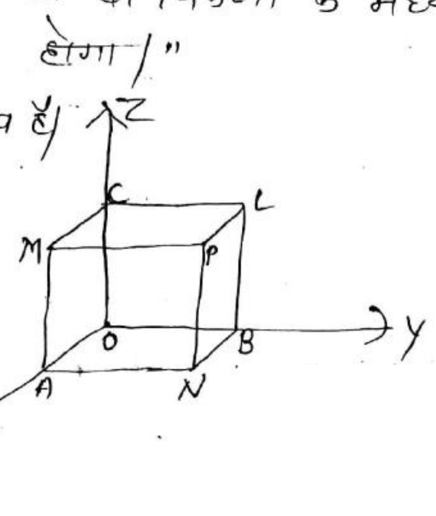
Now $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

☆ दो points $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड PQ का उस रेखा पर प्रक्षेप, जिसकी d.c.s l, m, n हो, $\boxed{(x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)}$ होता है।

Result ⇒ "एक घन के किन्हीं दो विकर्णों के मध्य कोण $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ होगा।"

prove ⇒ let घन की भुजा = a है।

then $O(0,0,0)$ $P(a,a,a)$
$A(a,0,0)$ $L(0,a,a)$
$B(0,a,0)$ $M(a,0,a)$
$C(0,0,a)$ $N(a,a,0)$



4)

विकर्ण	OP	AL	BM	CN
dr. s.	a, a, a	−a, a, a	a, −a, a	a, a, −a
d. c. s.	$\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}$	$-\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}$	$\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}$	$\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}$

$$\left(\because \frac{a}{\sqrt{\Sigma a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = \frac{\cancel{a}}{\sqrt3\,\cancel{a}} = \frac{1}{\sqrt3}\right)$$

$\because$ let OP व AL के मध्य कोण θ है।

$$\therefore \cos\theta = \left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

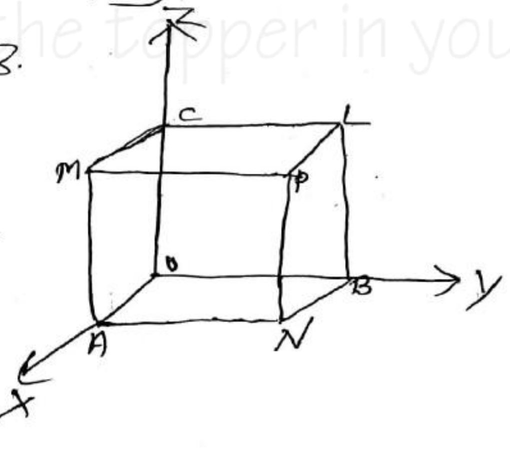
$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Result ⇒ एक घन के चार विकर्णों से कोई रेखा α, β, γ δ कोण बनाती है then

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}}$$

व $\boxed{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta = \frac{8}{3}}$

prove — let दी रेखा की d.c.s. l, m, n है & यह घन के विकर्णों OP, AL, BM व CN से क्रमशः $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ कोण बनाती है।



then $\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt3} + \frac{m}{\sqrt3} + \frac{n}{\sqrt3}$

$$\cos\beta = \frac{-l}{\sqrt3} + \frac{m}{\sqrt3} + \frac{n}{\sqrt3}$$

$$\cos\gamma = \frac{l}{\sqrt3} - \frac{m}{\sqrt3} + \frac{n}{\sqrt3}, \quad \cos\delta = \frac{l}{\sqrt3} + \frac{m}{\sqrt3} - \frac{n}{\sqrt3}$$

वर्ग करके जोड़ने पर — $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}}$

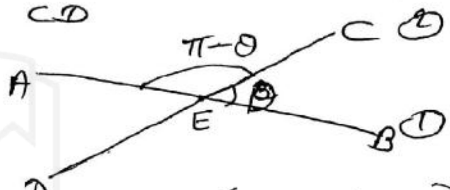
तथा $(1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\beta)+(1-\sin^2\gamma)+(1-\sin^2\delta)=\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=\frac{8}{3}}$$

Result ⇒ यदि 2 रेखाओं की दिक्कोज्याएँ क्रमशः l_1, m_1, n_1 & l_2, m_2, n_2 हैं & इनके मध्य θ है then इन रेखाओं के मध्य के कोण को समद्विभाजित करने वाली रेखा के दिक् अनु. $l_1 \pm l_2,\ m_1 \pm m_2,\ n_1 \pm n_2$

दिक् को. $\frac{l_1 \pm l_2}{2\cos(\theta/2)},\ \frac{m_1 \pm m_2}{2\cos(\theta/2)},\ \frac{n_1 \pm n_2}{2\cos(\theta/2)}$

prove – Let दो रेखाओं AB व CD के समान्तर रेखाएँ जो (0,0,0) से गुजरती हैं, OP व OQ हैं। here $OP=1$, $OQ=1$ & $\angle POQ=\theta$ है।



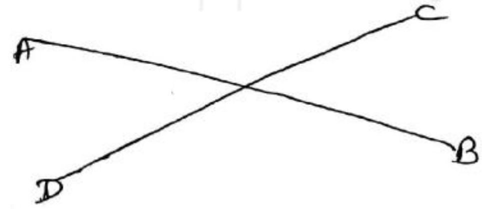
$AB = l_1, m_1, n_1$
$CD = l_2, m_2, n_2$

∴ P के निर्देशांक (l_1, m_1, n_1)

$Q = (l_2, m_2, n_2)$

Thus रेखा ② पर Q के विपरीत ओर point R इस प्रकार है कि $OR=1$

∴ $R = (-l_2, -m_2, -n_2)$



स्पष्टतया कोण POQ का अर्द्धक OM & कोण POR का अर्द्धक ON होगा। here $M\left(\frac{l_1+l_2}{2}, \frac{m_1+m_2}{2}, \frac{n_1+n_2}{2}\right)$

$N\left(\frac{l_1-l_2}{2}, \frac{m_1-m_2}{2}, \frac{n_1-n_2}{2}\right)$

Now अर्द्धक OM के d.r.s.

$\frac{l_1+l_2}{2}-0,\ \frac{m_1+m_2}{2}-0,\ \frac{n_1+n_2}{2}-0$

या $(l_1+l_2,\ m_1+m_2,\ n_1+n_2)$