Toppersnotes®
Unleash the topper in you

बिहार माध्यमिक शिक्षक

विषय : गणित

बिहार लोक सेवा आयोग

भाग - 2

SIERRA INNOVATIONS

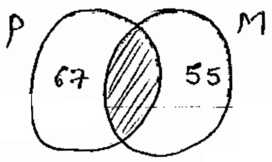
बिहार माध्यमिक शिक्षक

विषय : गणित

भाग - 2

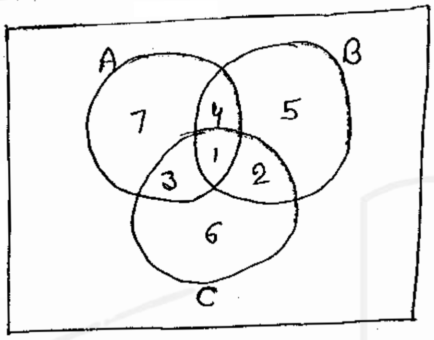
Sets, Relations and Functions

P.19)



p (केवल भौ.) $= 100 - p(M)$
$= 100 - 55 = 45$

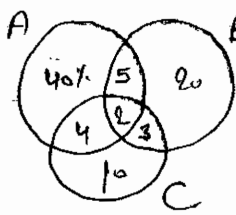
Universal Set $\Rightarrow$



$\because n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C)$
$+ n(A \cap B \cap C)$

(i) n(~~केवल~~ A) = क्षेत्र 7
(ii) n(only B) = 5
(iii) n(only C) = 6
(iv) n(ठीक एक समुच्चय में विद्यमान अवयव) = क्षे. (5 + 6 + 7)
(v) n(ठीक दो समुच्चय में विद्यमान अवयव) = क्षेत्र (3 + 2 + 4

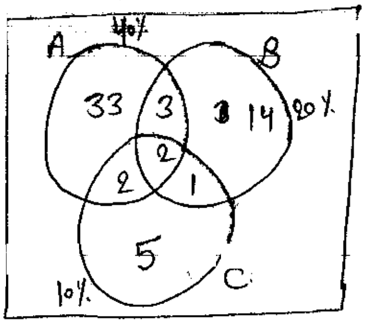
P.14)
+



Only A समाचार प
वाले परिवारों
सं. = 1000 ×

= 400 −
= 8

$1000 \times \frac{5}{100} = 50$, $1000 \times \frac{2}{100} = 20$, $1000 \times \frac{4}{100} = 40$



A : 40
B : 20
C : 10
AB : 5
BC : 3
CA : 4
ABC : 2

(i) n(केवल अखबार A पढ़ने वाले परिवार) = 330

$[40-(3+2+2)] = 33\%$ $\quad 1000 \times \frac{33}{100}$

(ii) n(ठीक एक अखबार पढ़ने वाले) = 520

$\Rightarrow [33+14+5 = 52]$ $\quad 1000 \times \frac{52}{100} = 520$

(iii) n(ठीक 2 अखबार पढ़ने वाले) = 60

(क्षेत्र $3+2+1 = 6$) $\quad 1000 \times \frac{6}{100} = 60$

(iv) n(कम से कम एक अखबार पढ़ने वाले) = 600

$\cancel{40}$ $\cancel{33+14+10 =}$

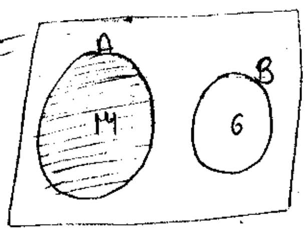
$33+3+2+2+1+14+5 = 60$

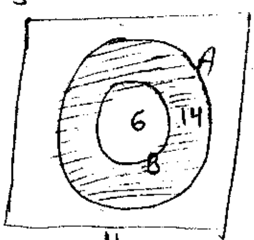
$1000 \times \frac{60}{100} = 600$

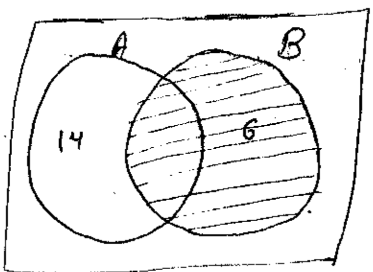
(v) n(अखबार न पढ़ने वाले) = $1000 - 600 = 400$ या 40%

Q) if $n(A) = 14$, $n(B) = 6$, $n(A \cup B) = x$ & $n(A \cap B) = y$ हो then x व y के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करो?

Sol^n







$A \cap B = \phi$ ⇓
$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
max होगा।

⇓
$A \cup B = A$ व $A \cap B = B$
(इसमें सबसे कम element है)

⇓

x का न्यूनतम मान $\Rightarrow n(A) = 14$

x का अधिकतम मान $\Rightarrow n(A) + n(B) = 14 + 6$
$= 20$

$\Rightarrow \boxed{14 \le x \le 20}$

व्यापक रूप से –

$$\boxed{\text{Max}\{n(A)\ n(B)\} \le n(A \cup B) \le n(A) + n(B)}$$

जब $A \cap B = \phi$ तब $n(A \cap B) = 0$

$\therefore$ y का न्यूनतम मान $= 0$

& y का अधिकतम मान $= 6$

$\Rightarrow \boxed{0 \le y \le 6}$

व्यापक रूप से $\Rightarrow$

$$\boxed{0 \le n(A \cap B) \le \min\{n(A) \cdot n(B)\}}$$

Q.11.) Let given Set A व B है।

	A	B
अवयव	m	n
उपसमुच्चय	2^m	2^n

$\therefore$ $2^m - 2^n = 56$

Now by option $\Rightarrow$ $2^6 - 2^3 = 56$

समुच्चय (Sets)

समुच्चय → वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं।

→ समुच्चय में संग्रहित वस्तुएं उसके सदस्य या तत्व कहलाते हैं।

→ यदि a समुच्चय A का सदस्य है, तो इसे प्रतीकात्मक रूप से $a \in A$ लिखते हैं (a belongs to A) । यदि b समुच्चय A का सदस्य नहीं है तो इसे $b \notin A$ लिखते हैं (b not belongs to A).

संकेतन (Notation): समुच्चयों को मुख्यतः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से निरूपित किया जाता है।

जैसे - A, B, X आदि

N - प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

Z - पूर्णांकों का समुच्चय

Z^+ - धन पूर्णांकों का समुच्चय

Z^- - ऋण पूर्णांकों का समुच्चय

R - वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

C → सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

Q → परिमेय संख्याओं का समुच्चय

समुच्चय का निरूपण

1. रोस्टर / सारणीबद्ध

→ सभी अवयवों को Comma द्वारा पृथक करते हुए बिना पुनरावृत्ति के { } के अन्दर लिखते है।

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

यहां $3 \in A$ परन्तु $4 \notin A$

2. निर्माण रूप

→ इसमें मझले कोष्ठक "{ }" के अन्दर अवयवों को सूचीबद्ध करने के बजाय उनके गुणधर्म लिखते है।

$N = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है$\}$

$Z = \{x : x$ एक पूर्णांक है$\}$

समुच्चय के प्रकार :-

(1) **एकल समुच्चय :-** जिसमें ~~अवयव~~ केवल एक अवयव हो।

जैसे- $A = \{2\}$

$B = \{\phi\}$

$\{0\}$, एक एकल समुच्चय है।

(2) **रिक्त समुच्चय :** वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नही हो। इसे ϕ या { } से प्रदर्शित करते है।

जैसे $\{x : x \in N, 9 < x < 10\} = \phi$

$\{x : x \in R, x^2 = -8\} = \phi$

(3) परिमित व अपरिमित समुच्चय :- वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित हो, परिमित समुच्चय और निश्चित नहीं हो तो अपरिमित समुच्चय कहलाता है।

जैसे- $A = \{a, e, i, o, u\}$ → परिमित

$B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ → अपरिमित

(4) समान समुच्चय :- यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A में हो तो वे समान समुच्चय कहलाते हैं।

जैसे $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{e, i, o, a, u\}$ → $A = B$

$A = \{p, q, r\}$

$B = \{q, p, r\}$

$C = \{r, q, p\}$

अतः $A = B = C$

(5) उपसमुच्चय (super-set) :- यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A का भी अवयव है, तो समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। इसे $B \subseteq A$ से निरूपित किया जाता है।

जैसे:- $A = \{3, 4, 5, 6\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

अतः $B \subseteq A$, B, A का एक उपसमुच्चय है।

(6) उचित उपसमुच्चय (Proper subset) व अधिसमुच्चय (superset)

→ यदि A और B दो समुच्चय है तथा $A \subset B$ एवं $A \neq B$ तो A, B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है और B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है।

जैसे:- $A = \{3, 4, 5\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

A, B का ~~समुच्चय~~ उचित उप समुच्चय है।

B, A का अधिसमुच्चय है।

(7) सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set) :- जब विचाराधीन सभी समुच्चय किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय होते है तो उस समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय कहते है।

जैसे:- यदि $A = \{1, 2, 4\}$

$B = \{2, 2, 4, 6\}$

$C = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ तब

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

यहां U सार्वत्रिक ~~समुच्चय~~ समुच्चय है जिसके A, B व C उपसमुच्चय है।

(8) घात समुच्चय :- किसी समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते है। A के घात समुच्चय को P(A) से निरूपित करते है।

→ घात समुच्चय कभी भी रिक्त नही होता है।

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ तो उपसमुच्च P(A) की संख्या $= 2^n$

यहां $P(A) = \{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$

समुच्चयों पर संक्रियाए :-

(1) संघ या सम्मिलन (Union) :- समुच्चय A तथा समुच्चय B का संघ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी अवयवों को सम्मिलित रूप से लेकर बनाया जाता है।

यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा

$B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

तब $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$

→ A Union B पढ़ते है इसे।

(2) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection) :- समुच्चय A तथा समुच्चय B का सर्वनिष्ठ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी उभयनिष्ठ अवयव उपस्थित हो।

यदि $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$B = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

$A \cap B = \{6, 12, 18\}$

→ इसे A intersection B पढ़ते है।

(3) समुच्चयों का अन्तर :- समुच्चय A का समुच्चय B से अन्तर, उन अवयवों का समुच्चय है जो ~~समुच्चय~~ समुच्चय A में है किन्तु समुच्चय B में नहीं।

यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A - B = \{1, 3, 5\}$

$B - A = \{8, 10\}$

(4) पूरक समुच्चय :- किसी समुच्चय का पूरक समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय के अवयवों में से उस समुच्चय के अवयवों को हटाने पर प्राप्त समुच्चय को कहते हैं

यदि $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots\}$

$A = \{2\}$

$A' = U - A = \{3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$

○ समुच्चयों के बीजगणितीय नियम :-

(1) Idempotent Laws :- किसी भी ~~समुच्च~~ समुच्चय A के लिए -

(i) $A \cup A = A$

(ii) $A \cap A = A$

(2) Identity Laws :- किसी भी समुच्चय A के लिए -

(i) $A \cup \phi = A$

(ii) $A \cap U = A$

(3) Commutative Law :- किन्हीं दो समुच्चयों A व B के लिए -

(i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A$

(4) Associative Laws :- यदि A, B व C तीन समुच्चय हो तो -

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(5) **Distributive Law:** यदि A, B व C तीन कोई समुच्चय है तब

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(6) **De-Morgan's Law** यदि A व B कोई दो समुच्चय है तब

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

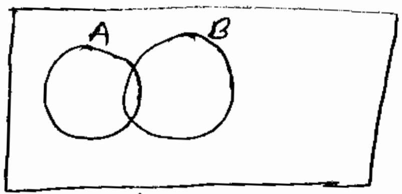
(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Venn आरेख द्वारा समुच्चयों का प्रदर्शन:- सार्वत्रिक समुच्चय को एक बड़े आयत से दर्शाते है तथा अन्य समुच्चयों को उस आयत के अन्दर वृत्तों से, तथा यदि दो समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ है तो उन द्वारा प्रदर्शित वृत्तों को, प्रतिच्छेदी वृत्तों से दर्शाते है।

उदा० यदि U सार्वत्रिक समुच्चय, A तथा B कोई दो समुच्चय हो, तो वेन आरेख द्वारा निम्न समुच्चय को प्रदर्शित कीजिए-

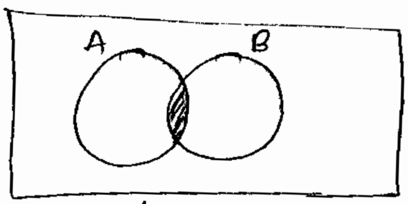
(i) $(A \cup B)$ (ii) $(A \cap B)$

हल: (i) $(A \cup B)$



$(A \cup B)$

(ii) $(A \cap B)$

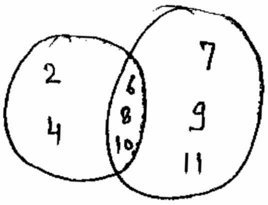


$(A \cap B)$

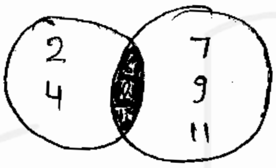
उदा० यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ हो तो $A \cup B$ तथा $A \cap B$ के Venn आरेख होंगे।

हल:

(i) $A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$



(ii) $A \cap B = \{6, 8, 10\}$



x का न्यूनतम मान $\Rightarrow n(A) = 14$

x का अधिकतम मान $\Rightarrow n(A) + n(B) = 14 + 6$

$= 20$

$\Rightarrow \boxed{14 \le x \le 20}$

<u>व्यापक रूप से–</u>

$$\boxed{Max\{n(A)\ n(B)\} \le n(A \cup B) \le n(A) + n(B)}$$

जब $A \cap B = \phi$ तब $n(A \cap B) = 0$

$\therefore$ y का न्यूनतम मान $= 0$

& y का अधिकतम मान $= 6$

$\Rightarrow \boxed{0 \le y \le 6}$

<u>व्यापक रूप से</u> $\Rightarrow$

$$\boxed{0 \le n(A \cap B) \le min\{n(A) \cdot n(B)\}}$$

Q.11.) Let given Set A व B है।

	A	B
अवयव	m	n
उपसमुच्चय	2^m	2^n

$\because 2^m - 2^n = 56$

Now by <u>option</u> $\Rightarrow$ $2^6 - 2^3 = 56$

<u>सम्बन्ध</u> $\Rightarrow$

Q.) यदि $A = \{a, b, c\}$ & $B = \{1, 2, 3\}$ है then बताइये निम्न में से कौन से A से B में सम्बंध है–

(i) $R_1 = \{(a,1), (a,2), (a,3)\}$

(ii) $R_2 = \{(a,1), (b,1), (c,1)\}$

(iii) $R_3 = \{(a,3), (4,b), (c,1)\}$ $\{\because (a,b) \notin A \times B\}$

(iv) $R_4 = A \times B$

(v) $R_5 = \phi$

⇒ सम्बन्ध $A \times B$, समुच्चय A से B पर सार्वत्रिक सम्बंध & ϕ A से B पर रिक्त सम्बंध कहलाता है।

Q.) यदि $A = \{a, b, c\}$ व $B = \{1, 2\}$ हो then A से B पर परिभाषित सम्बन्धों की सं. = ?

Solⁿ ⇒ $\because n(A \times B) = 3 \times 2 = 6$

$\because$ $A \times B$ का प्रत्येक उपसमुच्चय A से B में एक सम्बन्ध होता है। & 6 अवयवों वाले समुच्चय के उपसमुच्चयों की सं. 2^6 होती है। $\therefore$ A से B पर परिभाषित सम्बंधों की सं. 2^6 अर्थात 64 होगी।
& A से B में परिभाषित अरिक्त सम्बंधों की सं. $2^6 - 1$ अर्थात 63 होगी।

Q.) सम्बन्ध $R: N \to N$ में नियम $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$ द्वारा परिभाषित है। सम्बन्ध R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखो।

$\because$ given सम्बंध –

$xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$

$x = 1$ पर $\to$ $y = \frac{9}{2} \notin N$

$x = 2$ पर $\to$ $y = 4 \in N$, $2R4$

$x = 3$ पर $\to$ $y = 7/2 \notin N$

$x = 4$ पर $\to$ $y = 3 \in N$, $4R3$

$x = 6$ पर $\to$ $y = 2 \in N$, $6R2$

$x = 8$ पर $\to$ $y = 1 \in N$, $8R1$

$\therefore R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$

सम्बन्ध के प्रान्त व परिसर $\Rightarrow$

यदि R, A से B मे एक सम्बन्ध हो,

then (i) R का प्रांत = $\{a : (a,b) \in R\}$

(ii) R का परिसर = $\{b : (a,b) \in R\}$

Ex:- given सम्बन्ध -

$R: N \to N$ में नियम $x \in y \Leftrightarrow x + 2y = 10$

प्रांत = $\{2, 4, 6, 8\}$

~~परिसर~~ = $\because R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$

परिसर = $\{4, 3, 2, 1\}$

Q.66) given $R = \{(x,y) : x + 2y = 8\} \in N$

$x = 1$ पर $\Rightarrow y = 7/2 \notin N$

$x = 2$ पर $\Rightarrow y = 3 \in N$, $2R3$

$x = 4$ पर $\Rightarrow y = 2 \in N$, $4R2$

$x = 6$ पर $\Rightarrow y = 1 \in N$, $6R1$

$R = \{(2,3), (4,2), (6,1)\}$

अतः प्रांत = $(2, 4, 6)$

परिसर = $\{3, 2, 1\}$

प्रतिलोम सम्बंध $\Rightarrow$ यदि $R : A \to B$ में एक सम्बंध हो तब इसका प्रतिलोम सम्बन्ध

$R^{-1} : B \to A$ में निम्न प्रकार दिया जाता है-

$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$

$\Rightarrow$ $\boxed{R^{-1} \text{ का प्रांत} = R \text{ का परिसर}}$

& R^{-1} का ~~परिसर~~ = R का ~~प्रान्त~~

Ex:- सम्बन्ध $R : N \rightarrow N$

$x R y \Leftrightarrow x + 2y = 8$

$R = \{(2,3), (4,2), (6,1)\}$ का प्रतिलोम

सम्बंध $R^{-1} = \{(3,2), (2,4), (1,6)\}$

प्रांत of $R^{-1} = (3, 2, 1)$

परिसर of $R^{-1} = (2, 4, 6)$

स्वतुल्यता का Ex:-

① माना L_1 एक तल में स्थित रेखाओं का Set है। then Set R, जंहा $\boxed{l_1 R l_2 \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2}$

⇒ यह स्वतुल्य होगा।

⇒ तत्समक नहीं है।

② Let T एक तल में स्थित बिन्दुओं का समु० है तब सम्बंध $R : T \rightarrow T$, $\Delta_1 R \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2$ के समरूप है।

⇒ यह स्वतुल्य सम्बंध होगा।

⇒ तत्समक नहीं होगा।

③ सम्बंध $\phi : R \rightarrow R$, R वास्तविक संख्याओं का समु० है। जंहा $x \phi y \Leftrightarrow x = y$

अत: यह स्वतुल्य होगा।

तथा तत्समक भी होगा।

प्रत्येक वा० सं. only स्वयं के ही equal होती है।

⇒ $A = \{a, b, c\}$

∵ ϕ में कोई element नहीं है। अत: ϕ ना तो तत्समक होगा & ना ही स्वतुल्य होगा।