



बिहार माध्यमिक शिक्षक

विषय : गणित

बिहार लोक सेवा आयोग

भाग - 1



बिहार माध्यमिक शिक्षक

विषय : गणित

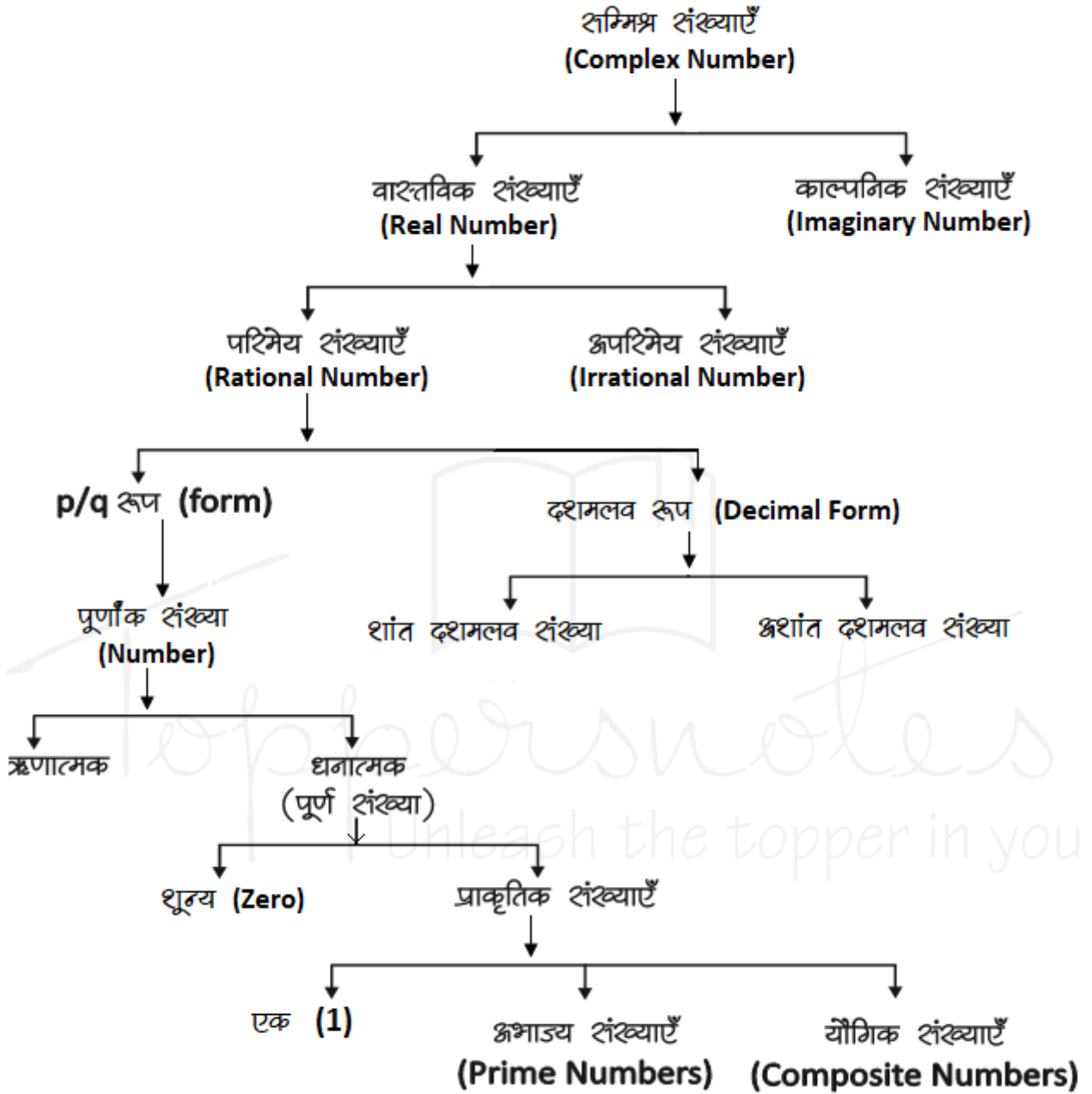
भाग - 1

1.	Number System	1
2.	Geometry	19
	• Lines and their types	19
	• Angles and their types	20
	• Polygon and its types	24
	• Triangle and its types	25
	• Median of Triangle	28
	• Centers of the triangle	29
	• Congruency of Triangle	31
	• Similarity of Triangles	33
	• Properties of Triangles	37
	• Quadrilateral	38
	• Circle	42
3.	Mensuration	74
	• Triangle	74
	• Quadrilateral	76
	• Circle	80
	• Cuboid	82
	• Cube	83
	• Cylinder	83
	• Cone	84
	• Sphere	85

4.	Algebra	109
	• Polynomials	109
	• Quadratic Equation	109
	• Remainder Theorem	111
	• Factor Theorem	444
	• Algebra of complex numbers	137
	• Polar representation	140
	• Cube root of complex numbers	142
	• Arithmetic & Geometric Progression	143
	• Permutation & Combination	189
	• Binomial Theorem	195
5.	Matrices & Determinants	199
	• Matrices and their types	199
	• Operations on Matrices	204
	• Determinants	216
	• Adjoint of a matrix	242
	• Inverse of a matrix	248
	• Solution of linear equation	259

संख्या पद्धति

(Number System)



सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number) (z)

$Z =$ वास्तविक संख्या + काल्पनिक संख्या

$$Z = a + ib$$

जहाँ a = वास्तविक संख्या

b = काल्पनिक संख्या

वास्तविक संख्याएँ

परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

काल्पनिक संख्याएँ : जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे I से सूचित करते हैं।
 $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं।
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।
 $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती हैं।
 n वां पद = $2n$

प्रथम n सम संख्याओं का योग = $n(n+1)$

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2} \right\}$$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं।
 प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2} \right\}$$

प्राकृतिक संख्याएँ : प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग = $\frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है।

उदाहरण - $11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) - जिन्हें सिर्फ दो form हो- $1 \times$ संख्या

जैसे - $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$

जहाँ 1 Prime Number नहीं है ।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है ।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है ।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है ।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है ।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है ।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

सह अभाज्य संख्याएँ - वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो ।

उदाहरण - $(4,9), (15, 22), (39, 40)$

HCF = 1

Perfect Number (परफेक्ट संख्या) - वह संख्या जिन्हें गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण - $6 \rightarrow 1, 2, 3 \rightarrow$ यहाँ $1+2+3 \rightarrow 6$

$28 \rightarrow 1, 2, 4, 7, 14 \rightarrow 1+2+4+7+14 \rightarrow 28$

परिमेय (Rational) संख्याएँ - वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए ।

उदाहरण - $2/3, 4/5, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ - इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता ।

उदाहरण - $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26} \dots$

पूर्णवर्ग संख्या



Unit Digit जो वर्ग के हो सकते हैं

- 0
- 1
- 4
- 5 or 25
- 6
- 9

जो नहीं हो सकते

- 2 —
- 3 —
- 7 —
- 8 —

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

नोट - अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

1. Decimal संख्या को Binary में बदलना

किसी दशमलव संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त दशमलव संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते हैं जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।

उदाहरण -

2	89	$2 \times 44 = 88 ; 89 - 88 = 1$
	44	$2 \times 22 = 44 ; 44 - 44 = 0$
	22	$2 \times 11 = 22 ; 22 - 22 = 0$
	11	$2 \times 5 = 10 ; 11 - 10 = 1$
	5	$2 \times 2 = 4 ; 5 - 4 = 1$
	2	$2 \times 1 = 2 ; 2 - 2 = 0$
	1	अंतिम भागफल

अतः 89 के समतुल्य Binary number = $(1011001)_2$

2. Binary को Decimal में बदलना

Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाईं ओर एक स्थान स्थित करता है, स्वयं का दोगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण -

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Now

$$\begin{aligned}
 (1011001)_2 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} \\
 &= 89
 \end{aligned}$$

भाजकों की संख्या या गुणनसंख्या की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण - 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल - $2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$
 भाजकों की संख्या = $(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)$
 $= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

इकाई का श्रंक ज्ञात करना

1. जब संख्या घात (power) के रूप में हो

जब Base का इकाई श्रंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई श्रंक वही रहेगा।

जब base का इकाई श्रंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देने और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई श्रंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः कर जाता है तो base के इकाई श्रंक पर 4 power रखेंगे।

2. सरलीकरण के रूप में हो

प्रत्येक संख्या के इकाई के श्रंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई श्रंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो

n विषम होने पर $(a+b)$ इसका भाजक होगा।

2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

n विषम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$

n सम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$ या $(a+b)$ या दोनों।

1. $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

2. $a^n \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा।

{ यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा

3. $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा

4. $(a^n + a) \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा।

{ यदि n विषम हो, तो शेषफल $(a-1)$ होगा।

शांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ श्रंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे - 0.25, 0.15, 0.375 इतने भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है।

अंशांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद चलते रहते हैं और ये दो तरह के हो सकते हैं ।

0.3333, 0.7777, 0.183183183.....

पुनरावृत्ति
Repeating

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अंशत तक । इसे भिन्न में लिखा जा सकता है ।

Non
Repeating
Decimal

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती ।

आवर्ती दशमलव भिन्न

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है ।

जैसे - $\frac{1}{3} = 0.333\dots$, $\frac{22}{7} = 3.14285714\dots$ ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं ।

$$0.333\dots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{22}{7} = 3.14285714\dots = 3.14285\overline{7}$$

इसे बार बोलते हैं ।

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.\overline{p} = \frac{p}{9}$$

$$0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$$

$$0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.p\overline{q} = \frac{pq-p}{90}$$

$$0.pq\overline{r} = \frac{pqr-pq}{900}$$

$$0.p\overline{q}r = \frac{pqr-p}{990}$$

$$0.pq\overline{r}s = \frac{pqrs-pq}{9900}$$

उदाहरण - (i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625-6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524-35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

हल सहित उदाहरण

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित

उदा.1 यदि किसी संख्या का $\frac{3}{4}$ उस संख्या के $\frac{1}{6}$ से 7 अधिक है, तो उस संख्या $\frac{5}{3}$ क्या होगा ?

- (a) 12 (b) 18 (c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

हल माना कि संख्या = x

प्रश्नानुसार,

$$\Rightarrow \frac{9x - 2x}{12} = 7$$

$$\Rightarrow 7x = 7 \times 12$$

$$\Rightarrow x = 12$$

\Rightarrow संख्या का $\frac{5}{3}$ भाग

$$= \frac{x - 5}{3} \Rightarrow \frac{12 \times 5}{3} = 20$$

उदा.2 किसी संख्या को 11 से गुणा करने पर वह 180 से उतनी अधिक हो जाती है जितनी वह आरम्भ में 180 से कम थी संख्या ज्ञात कीजिए ।

हल माना अभीष्ट संख्या = x तब,

$$11x - 180 = 180 - x$$

$$\Rightarrow 12x = 360 = x = 30$$

अतः = अभीष्ट संख्या = 30

उदा.3 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b , उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

- (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c)

हल माना दो संख्याएँ P तथा Q हैं ।

$$P + Q = a$$

$$PQ = b$$

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} \Rightarrow \frac{Q + P}{PQ} = \frac{a}{b}$$

उदा.4 8 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा ?

- (a) 1350 (b) 1250
(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

हल माना बड़ी संख्या x तथा छोटी संख्या y हैं ।

$$\therefore x + y = 75 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{तथा } x - y = 25 \dots\dots\dots (ii)$$

$2x = 100$ (समी. (i) एवं समी. (ii)) को जोड़ने पर

$$x = 50$$

x का मान समी. (i) में रखने पर

$$50 + y = 75$$

$$y = 75 - 50 = 25$$

अतः दोनों संख्याओं का गुणनफल = xy

$$= 50 \times 25 \Rightarrow 1250$$

उदा.5 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का $\frac{5}{16}$ ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का $\frac{5}{6}$ ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये।

- (a) 300 (b) 480 (c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

हल मान लीजिए कि संख्या X है

प्रश्न के अनुसार

$$\frac{5}{6}x - \frac{5}{16}x = 250$$

$$\frac{40x - 15x}{48} = 250$$

$$25x = 250 \times 48$$

$$x = \frac{250 \times 48}{25} = 480 \text{ उत्तर}$$

उदा.6 150 को दो हिस्सों में विभाजित करें, जिससे कि उन दोनों के पारस्परिक (reciprocal) का योग $\frac{3}{112}$ हो तो दोनों हिस्सों की गणना करें -

- (a) 50, 90 (b) 70, 80
 (c) 60, 90 (d) 50, 100

उत्तर (b)

हल माना पहला हिस्सा x है, तो दूसरा हिस्सा $(150 - x)$ होगा ।

प्रश्नानुसार,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{(150 - x)} = \frac{3}{112}$$

$$\frac{150 - x + x}{x(150 - x)} = \frac{3}{112}$$

$$3x(150 - x) = 150 \times 112$$

$$150x - x^2 = \frac{150 \times 112}{3}$$

$$x^2 - 150x + 5600 = 0$$

$$x^2 - 70x - 80x + 5600 = 0$$

$$x(x - 70) - 80(x - 70) = 0$$

$$(x - 80)(x - 70) = 0$$

$$x = 80 \text{ या } 70$$

यदि पहला हिस्सा = 80 तथा दूसरा हिस्सा = $150 - 80 \Rightarrow 70$

यदि पहला हिस्सा = 70 तब दूसरा हिस्सा = $150 - 70 \Rightarrow 80$

राम, विषम तथा क्रभाज्य संख्याओं पर आधारित

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47

(b) 48

(c) 49

(d) 51

उत्तर (c)

हल $x =$ कोई विषम संख्या है ।

प्रश्नानुसार,

$$(x) + (x + 2) + (x + 4) = 147$$

$$3x + 6 = 147$$

$$x = \frac{141}{3} = 47$$

$$\text{Middle Number } (x + 2) = 47 + 2 = 49$$

उदा.2 तीन क्रभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

हल $x + y + z = 100$

$$\{x = 2 \text{ आवश्यक होगा}\}$$

$$2 + y + z = 100 \quad y + z = 100 - 2 = 98$$

$$y - z = 36 \quad 2y = 134$$

$$y = 1 \quad x = 2$$

$$z = 98 - 67 = 31 \text{ उत्तर}$$

उदा.3 4 लगातार क्रभाज्य संख्याओं में से प्रथम तीन एवं अंतिम तीन का गुणनफल 385 एवं 1001 हो तो बड़ी क्रभाज्य संख्या ज्ञात कीजिए ।

हल a, b, c, d चार लगातार प्राकृतिक संख्या है ।

$$abc = 385 \quad (i)$$

$$bcd = 1001 \quad (ii)$$

$$\frac{abc}{bcd} = \frac{385}{1001} = \frac{5}{13}$$

शबरी बडी क्रमाज्य संख्या = 13

Trick:

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = ?$$

$$? = \left(\frac{99+1}{2} \right)^2 = 2500 \text{ उत्तर}$$

उदा.4 50 एवं 100 के बीच श्रिते वाले शम संख्याओं का योग कितना होगा ?

हल $52 + 54 + 56 + \dots + 98$

$$= (2 + 4 + 6 + \dots + 98) - (2 + 4 + 6 + \dots + 50)$$

$$n = \frac{98}{2} = 49, n = \frac{50}{2} = 25$$

$$= 49 \times 50 = 2450, 25 \times 26 = 650$$

$$\therefore ? = 2450 - 650 = 1800 \text{ उत्तर}$$

उदा.5 50 एवं 100 के बीच श्रिते वाले विषम संख्याओं का योग कितना होगा ?

हल: $51 + 53 + \dots + 99$

$$= (1 + 3 + 5 + \dots + 99) - (1 + 3 + 5 + \dots + 49)$$

$$= \frac{99+1}{2} = \frac{100}{2} = 50, \frac{49+1}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\therefore ? = (50)^2 - (25)^2$$

$$= 2500 - 625 = 1875 \text{ उत्तर}$$

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित

उदा.1 64329 को जब किसी संख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते हैं तो भाज्य क्या है ?

- (a) 184 (b) 224 (c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

हल

$$\text{xxx} \overline{)64329} \text{ xxx}$$

$$\begin{array}{r} \text{xxx} \\ 1752 \end{array} \text{ (i)}$$

$$\begin{array}{r} \text{xxx} \\ 1149 \end{array} \text{ (ii)}$$

$$\begin{array}{r} \text{xxx} \\ 213 \end{array} \text{ (iii)}$$

Number at (1) = 643 – 175 = 468

Number at (2) = 1752 - 114 = 1638

Number at (3) - 1149 - 213 = 936

H.C.F. of 468, 1638, 936 = 234

The divisor is 234. उत्तर

उदा.2 $(3^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28})$ विभाजित है ।

- (a) 11 (b) 16 (c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

हल

$$(35^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28})$$

$$3^{25} (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$$

$$3^{25} \times 40 = 3^{24} \times 120$$

(अब विकल्प चेक करें इसे केवल 30 ही विभाजित कर सकता है)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है । तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

- (a) 2706 (b) 2796
(c) 2736 (d) 2826

उत्तर (c)

हल

शेषफल = 36

∴ विभाजक = 5 × 36 = 180

∴ भागफल = $\frac{180}{12} = 15$

∴ भाज्य = विभाजक × भागफल + शेषफल
 = 180 × 15 + 36
 = 2700 + 36
 = 2736 उत्तर

इकाई शंक निकालना आधारित

उदा.1 यदि 781, 325, 497 एवं 243 को आपस में गुणा किया जाए तो गुणनफल में इकाई के स्थान पर कौन-सी संख्या होगी ?

हल प्रदत्त संख्याओं में इकाई के स्थान पर स्थित सभी संख्याओं को आपस में गुणा करें :

$$1 \times 5 \times 7 \times 3 \text{ इस प्रकार गुणनफल में इकाई के स्थान पर 5 होगा।}$$

उदा.2 $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$ के परिणाम का इकाई शंक ज्ञात कीजिए ?

हल $6 \times 3 + 7 \times 8 - 4 \times 3$
 $18 + 56 - 12 = 62$
 $= 2 \text{ उत्तर}$

उदा.3 $(3694)^{1793} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$ में इकाई शंक कितना है ?

- (a) 0 (b) 2
 (c) 3 (d) 5

हल $(3694)^{1793}$ में इकाई शंक $= (4)^{1793}$ में इकाई $= \left\{ (4^2)^{896} \times 4 \right\}$ में इकाई शंक

$= (6 \times 4)$ में इकाई शंक $= 4$

$(615)^{317}$ में इकाई शंक $= (5)^{317}$ में इकाई शंक $= 5$

$(841)^{491}$ में इकाई शंक $= (1)^{491}$ में इकाई शंक $= 1$

$5 \times 4 \times 1 = 20$ इकाई शंक $= 0$

उदा.4 $\left[\frac{(12)^{55}}{(3)^{11}} + \frac{(8)^{48}}{(16)^{18}} \right]$ का इकाई शंक ज्ञात करें।

- (a) 4 (b) 6
 (c) 8 (d) 0

हल $\frac{(12)^{55}}{(3)^{11}} + \frac{(8)^{48}}{(16)^{18}}$

$$= \frac{(2^2 \times 3)^{55}}{(3)^{11}} + \frac{(2^3)^{48}}{(2^4)^{18}}$$

$$= \frac{2^{110} \times 3^{55}}{(3)^{11}} + \frac{2^{144}}{2^{72}}$$

$$= 2^{110} \times 3^{44} + 2^{72}$$

प्रत्येक पद का इकाई शंक निकालने पर

$$2^2 \times 3^4 + 2^4$$

$$4 \times 81 + 16 \Rightarrow 4 + 6 = 10$$

$$\therefore = 0$$

प्राकृतिक संख्याओं के square एवं cube तथा उनके योग एवं अंतर आधारित

उदा.1 $(11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 20^2) = ?$

(a) 385

(b) 2485

(c) 2870

(d) 3255

हल हम जानते हैं कि : $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\therefore \text{दिया गया व्यंजक} = (1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 + 11^2 + \dots + 20^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 10^2)$$

$$= \left(\frac{1}{6} \times 20 \times 21 \times 41 \right) - \left(\frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 \right) = (2870 - 385) = 2485.$$

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = ?$

हल $n = 10$

$$\therefore \sum N^3 = \left\{ \frac{N(N+1)}{2} \right\}^2$$

$$\therefore ? = \left\{ \frac{10(10+1)}{2} \right\}^2 = \left(\frac{11 \times 10}{2} \right)^2$$

$$= 55^2 = 3025$$

दशमलव संख्या आधारित

उदा.1 18.484848.... को $\frac{p}{q}$ के रूप में निरूपित करने पर क्या लिखेंगे ?

(a) $\frac{462}{25}$

(b) $\frac{610}{33}$

(c) $\frac{200}{11}$

(d) $\frac{609}{33}$

हल माना $x = 18.484848\dots$ तब,

$$100x = 1848.484848\dots$$

$$\text{घटाने पर, } 99x = 1830 \Rightarrow x = \frac{1830}{99} = \frac{610}{33}$$

$$\text{अतः } 18.484848\dots \text{ का अभीष्ट रूप } = \frac{610}{33}$$

उदा.2 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016 \times 0.025}{0.325 \times 0.05} \div \frac{0.1216 \times 0.105 \times 0.002}{0.08512 \times 0.625 \times 0.039} + \left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}} \right)^2$$

उसका उत्तर $\frac{19}{10}$ था। उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

हल दिया गया व्यंजक = $\frac{16 \times 25}{325 \times 5 \times 100} \div \frac{1216 \times 105 \times 2 \times 10}{8512 \times 625 \times 39} + \left\{ (3^3)^{\frac{1}{6}} - \sqrt{\frac{27}{4}} \right\}^2$

$$= \frac{4}{1625} \div \frac{4}{325} + \left\{ 3^{\left(3 \times \frac{1}{6}\right)} - \sqrt{\frac{27}{4}} \right\}^2 = \frac{4}{1625} \times \frac{325}{4} + \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{5} + \left(3 + \frac{27}{4} - 9 \right) = \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4} \right) = \frac{19}{20}$$

सही उत्तर = $\frac{19}{20}$, विद्यार्थी का उत्तर = $\frac{19}{10}$

$$\text{त्रुटि} \left(\frac{19}{20} - \frac{19}{10} \right) = \frac{1}{20}$$

$$\text{त्रुटि \%} = \frac{(1/20)}{(19/20)} \times 100 = \left(\frac{1}{20} \times \frac{20}{19} \times 100 \right) = \frac{100}{19} \% = 5\frac{5}{19} \%$$

उदा.3 $\frac{0.\overline{936} - 0.\overline{568}}{0.4\overline{5} + 2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

हल $0.\overline{936} = \frac{936}{999}, 0.\overline{568} = \frac{568}{999}$

$$\therefore (0.\overline{936} - 0.\overline{568}) = \left(\frac{936}{999} - \frac{568}{999} \right) = \frac{(936 - 568)}{999} = \frac{368}{998}$$

$$0.4\overline{5} = \frac{45}{99}, 2.\overline{67} = 2 + 0.\overline{67} = 2 + \frac{67}{99} = \frac{198 + 67}{99} = \frac{265}{99}$$

$$\therefore (0.4\overline{5} + 2.\overline{67}) = \left(\frac{45}{99} + \frac{265}{99} \right) = \frac{(45 + 265)}{99} = \frac{310}{99}$$

$$\text{दिया गया व्यंजक} = \left(\frac{\overset{184}{\cancel{368}}}{\underset{111}{\cancel{999}}} \times \frac{\overset{11}{\cancel{99}}}{\underset{155}{\cancel{310}}} \right) = \frac{2024}{17205}$$

शून्य की संख्या पर आधारित

उदा.1 $(1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times \dots \times 98^{98} \times 99^{99} \times 100^{100})$ के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200

(b) 1300

(c) 1500

(d) 1600

हल (b)

शून्यों की संख्या 5 की संख्या तथा 2 की संख्या पर निर्भर करता है ।

$$5 \text{ की संख्या } = (5+10+15+\dots+100) + (25+50+75+100)$$

$$= 5(1+2+\dots+20) + 250$$

$$= 5 \times \frac{20 \times 21}{2} + 250$$

$$= 1050 + 250 = 1300$$

उदा.2 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 250$ को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

हल $\frac{250}{5} = 50$

$$\frac{50}{5} = 10$$

$$\frac{10}{5} = 2$$

\therefore शून्यों की संख्या $= 50 + 10 + 2 = 62$

सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करना आधारित

उदा.1 निम्नलिखित में से कौनसी भिन्न बड़ी है: $\frac{13}{15}$ या $\frac{20}{23}$

हल पहला चरण: $13 \times 23 < 15 \times 20$

दूसरा चरण: $\frac{20}{23}$ बड़ी भिन्न है ।

उदा.2 निम्न में से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

(a) $\frac{3}{7}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$

(d) $\frac{1}{2}$

हल (a)

$$\frac{2}{5} = 0.40 \qquad \frac{4}{9} = 0.44$$

$$\frac{3}{7} = 0.43 \qquad \frac{2}{3} = 0.66$$

$$\frac{4}{5} = 0.80 \qquad \frac{1}{2} = 0.50$$

स्पष्टतः भिन्न $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित हैं ।