Toppersnotes®
Unleash the topper in you

RAJASTHAN

LOWER DIVISION CLERK

लिपिक ग्रेड II/कनिष्ठ सहायक

राजस्थान कर्मचारी चयन बोर्ड, जयपुर

भाग – 2

गणित एवं सामान्य अध्ययन

SIERRA INNOVATIONS

RAJASTHAN L.D.C.

CONTENTS

गणित		
1.	संख्या पद्धति	1
2.	सरलीकरण	9
3.	वैदिक विधि से वर्ग, घन एवं वर्गमूल, घनमूल	14
4.	औसत	19
5.	प्रतिशत्ता	23
6.	बट्टा	27
7.	लाभ – हानि	30
8.	साझेदारी	35
9.	अनुपात एवं समानुपात	38
10.	साधारण ब्याज	43
11.	चक्रवृद्धि ब्याज	47
12.	समय और कार्य	50
13.	चाल, समय और दूरी	53
14.	आकड़ो का चित्रों द्वारा निरूपण/ बारंबारता बंटन	57
15.	सांख्यिकी (केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप)	65
16.	डाटा इंटरप्रिटेशन	72
17.	बीजगणित	83
18.	निर्देशांक ज्यामिति	88

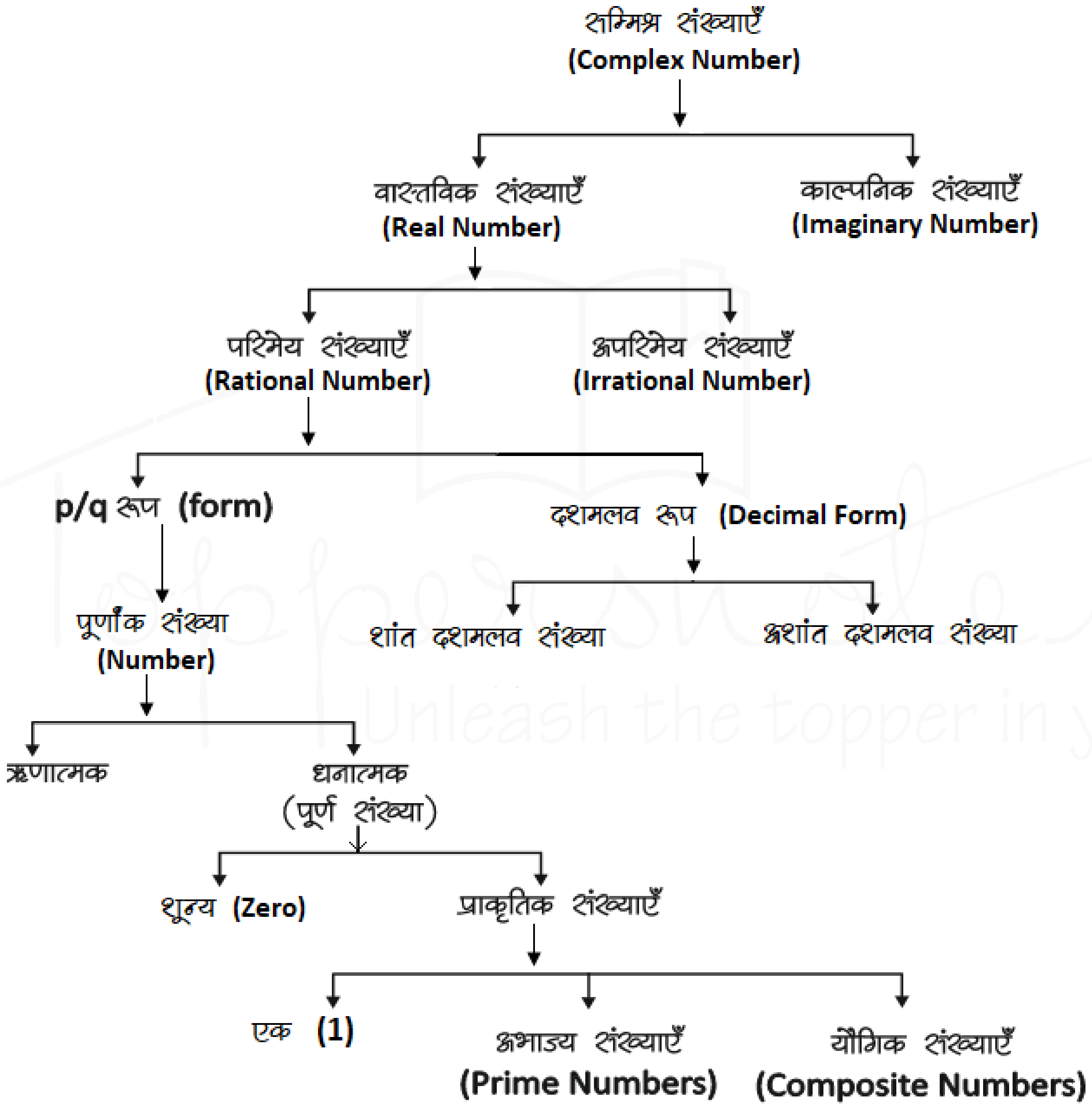
19.	**त्रिकोणमिति**	91
20.	**ऊँचाई व दूरी**	98
21.	**ज्यामिति**	102
22.	**क्षेत्रमिति**	118
23.	**लघुगणक**	135

राजस्थान का इतिहास एवं संस्कृति

1.	राजस्थान का इतिहास एवं राजवंश	138
2.	राजस्थान में 1857 का विद्रोह	198
3.	किसान आन्दोलन	204
4.	राजनीतिक एकीकरण	212
5.	भाषा एवं बोलियाँ	220
6.	राजस्थान का साहित्य	225
7.	लोक गीत	237
8.	लोक नत्य	249
9.	संत एवं लोक देवी-देवता	257
10.	मेले और त्यौहार	272
11.	रीति-रिवाज एवं प्रथाएं	281
12.	आभूषण एवं वेशभूषा	287

संख्या पद्धति
(Number System)

सिद्धांत



सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number) (z)

Z = वास्तविक संख्या + काल्पनिक संख्या

$$\boxed{Z = a + ib}$$

जहाँ a = वास्तविक संख्या
b = काल्पनिक संख्या

वास्तविक संख्याएँ

परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते है। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

काल्पनिक संख्याएँ : जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता हैं।

पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ

ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे I से सूचित करते हैं ।
I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं ।
N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं ।
W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है ।

सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है ।
n वां पद = 2n
प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)
प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती है ।
प्रथम n विषम संख्याओं का योग $= n^2$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}\right\}$

प्राकृतिक संख्याएँ : प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग $= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है ।
उदाहरण – $11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

<u>अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers)</u> – जिसके सिर्फ दो form हो– 1 × संख्या
जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}
जहाँ 1 Prime Number नहीं है ।
2 एकमात्र सम Prime संख्या है ।
3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोडा है ।
1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9
25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6
1-50 तक कुल 15 Prime Number है ।
51-100 तक कुल 10 Prime Number है ।
अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है ।
1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46
1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62
1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78
1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

<u>सह अभाज्य संख्याएँ</u> – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो ।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)
HCF = 1

<u>Perfect Number (परफेक्ट संख्या)</u> – वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोडकर)
उदाहरण –6 → 1, 2, 3 → यहाँ 1+2+3 → 6
28 → 1, 2, 4, 7, 14 → 1+2+4+7+14 → 28

<u>परिमेय (Rational) संख्याएँ</u> – वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए ।

उदाहरण – 2/3, 4/5, $\frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

<u>अपरिमेय **(Irrational)** संख्याएँ</u> – इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता ।

उदाहरण – $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}$ …. …

पूर्णवर्ग संख्या
↓

Unit Digit जो वर्ग के हो सकते है	जो नहीं हो सकते
0	2
1	3
4	7
5 or 25	8
6	
9	

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे ।

<u>नोट</u> – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए ।

Binary व Decimal में बदलना

1. Decimal संख्या को **Binary** में बदलना

किसी दशमलव संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त दशमलव संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते है जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है ।

उदाहरण –

	89	$2 \times 44 = 88$; $89 - 88 = 1$
	44	$2 \times 22 = 44$; $44 - 44 = 0$
	22	$2 \times 11 = 22$; $22 - 22 = 0$
	11	$2 \times 5 = 10$; $11 - 10 = 1$
	5	$2 \times 2 = 4$; $5 - 4 = 1$
	2	$2 \times 1 = 2$; $2 - 2 = 0$
	1	अंतिम भागफल

अतः 89 के समतुल्य Binary number = $(1011001)_2$

2. Binary को Decimal में बदलना

Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाई ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है ।

उदाहरण –

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Now

$(1011001)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \times 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1$ $\{2^0 = 1\}$ $= 89$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोडकर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी ।

उदाहरण – 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है ।

हल – $2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या = (3+1) (1+1) (1+1) (1+1)

$= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. जब संख्या घात (power) के रूप में हो

जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा ।

जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे । जब power, 4 से पूर्णतः कट जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे ।

2. सरलीकरण के रूप में हो

प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा ।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो

   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा ।

2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो ।

   n विषम होने पर भाजक $\rightarrow$ (a–b)

   n सम होने पर भाजक $\rightarrow$ (a – b) या (a + b) या दोनों ।

1. $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा ।
2. $a^n \div (a+1)$
   - यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा
   - यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा
3. $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा
4. $(a^n + a) \div (a+1)$
   - यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा ।
   - यदि n विषम हो, तो शेषफल $(a-1)$ होगा ।

शांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

अशांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद चलते रहते हैं और ये दो तरह के हो सकते है ।

0.3333, 0.7777, 0.183183183..........

- जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक । इसे भिन्न में लिखा जा सकता है ।

Non Repeating Decimal — जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती ।

आवर्ती दशमलव भिन्न

पुनरावृत्ति Repeating — वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है ।

जैसे – $\frac{1}{3} = 0.333...,\ \frac{22}{7} = 3.14285714.....$ ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते है ।

इसे बार बोलते है ।

$$0.333..... = 0.\overline{3}$$

$$\frac{22}{7} = 3.14285714.... = 3.14\overline{2857}$$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$$0.\overline{P} = \frac{P}{9} \qquad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99} \qquad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$$0.p\overline{q} = \frac{pq - p}{90} \qquad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$$

$$0.p\overline{qr} = \frac{pqr - p}{990} \qquad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs - pq}{9900}$$

<u>उदाहरण</u> –(i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625-6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524-35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

रोमन पद्धति के संकेतक

1	→	I
2	→	II
3	→	III
4	→	IV
5	→	V
6	→	VI
7	→	VII
8	→	VIII
9	→	IX
10	→	X
20	→	XX
30	→	XXX
40	→	XL
50	→	L
100	→	C
500	→	D
1000	→	M

विभाजकता के नियम

2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी । जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी । जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	किसी संख्या के अन्तिम अंक को 2 से गुणा करके शेष संख्या से घटाने पर यदि संख्या 0 या 7 का गुणज हो तो अथवा किसी भी अंक का 6 के गुणज में दोहराए तो संख्या 7 से विभाज्य होगी । जैसे – 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी ।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	अंक का 6 बार दोहराए तो, या अन्तिम अंक का 4 से गुणा करके शेष संख्या में जोड़ने पर संख्या अगर 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी । जैसे – 222222, 17784

अभ्यास प्रश्न

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किसी संख्या का 3/4 उस संख्या के 1/6 से 7 अधिक है, तो उस संख्या 5/3 क्या होगा ?

(a) 12 (b) 18

(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b, उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$

(c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा ?

(a) 1350 (b) 1250

(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का 5/16 ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का 5/6 ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये ।

(a) 300 (b) 480

(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48

(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 64329 को जब किसी संख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते है तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224

(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2 $(3^{25}+3^{26}+3^{27}+3^{28})$ विभाजित है ।

(a) 11 (b) 16

(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है । तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706 (b) 2796

(c) 2736 (d) 2826

उत्तर (c)

इकाई अंक निकालना आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$ के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

उदा.2 $(3694)^{1739} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$ में इकाई अंक कितना है ?

(a) 0 (b) 2
(c) 3 (d) 5

प्राकृतिक संख्याओं के squre एवं cube तथा उनके योग एवं अंतर आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 20^2\right) = ?$

(a) 385 (b) 2485
(c) 2870 (d) 3255

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = ?$

दशमलव संख्या आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016 \times 0.025}{0.325 \times 0.05} \div \frac{0.1216 \times 0.105 \times 0.002}{0.08512 \times 0.625 \times 0.039} + \left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$$

उसका उत्तर $\frac{19}{10}$ था । उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2 $\frac{0.\overline{936} - 0.\overline{568}}{0.\overline{45} + 2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

शून्य की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times .... \times 98^{98} \times 99^{99} \times 100^{100}\right)$ के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200 (b) 1300
(c) 1500 (d) 1600

उदा.2 $1 \times 2 \times 3 \times .... \times 250$ को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

सबसे बडी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करना आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्न मे से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न है ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बडी संख्या है ।

$(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$

(a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1
(c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

आरोही/अवरोही क्रम आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को बढते क्रम में लिखने पर –

(a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$
(c) $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ –

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$ को अवरोही क्रम में लिखिये ?

गुणनखंडों की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left\{(127)^{127}+(97)^{127}\right\}$ तथा $\left\{(127)^{97}+(97)^{97}\right\}$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

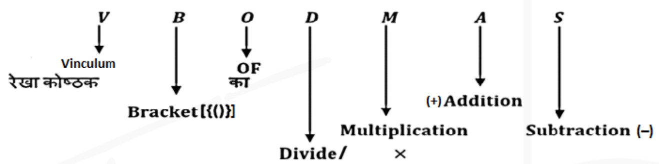
(a) 127 (b) 97

(c) 30 (d) 224

उदा.2 $\frac{(18)^{15}\times(75)^{16}\times(42)^{14}}{(35)^{12}\times(12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड हैं ?

सरलीकरण (Simplification)

- सरलीकरण के अंतर्गत हम दिए गये आँकड़ों को सरल रूप में प्रदर्शित करते है जैसे कि आँकड़े भिन्न में, दशमलव में, बट्टे में, घात में तथा Mathematical Operation को हल करके या रूप बदल के किया जाता है ।
- यदि कुछ संख्या पर भिन्न-भिन्न प्रकार के Operation दिये हो तो हम उसे कैसे हल करे कि प्रश्न का उत्तर सही आये उसके लिये एक Rule होता है जिसे हम VBODMAS का Rule कहते है ।
- हम पहले कौनसा Operation करे, यह VBODMAS का Rule तय करता है ।



- इन सभी गणितीय क्रियाओं में सबसे पहले V है जिसका मतलब Vinculum (रेखा कोष्ठक) है । यदि प्रश्न में रेखा कोष्ठक है तो सर्वप्रथम उसे हल करेंगे और उसमें फिर (BODMAS) Rule कार्य करेगा
- द्वितीय स्थान पर B (Bracket) मतलब कोष्ठक है जो निम्न हो सकते है-
  1. छोटा कोष्ठक ( )
  2. मंझला कोष्ठक { }
  3. बड़ा कोष्ठक [ ]
- सबसे पहले छोटा कोष्ठक, फिर मंझला कोष्ठक और उसके बाद बड़ा कोष्ठक हल किया जाता है ।
- तृतीय स्थान पर "O" है जो कि "of" या "Order" से बना है, जिसका मतलब ''गुणा'' से या ''का'' से होता है ।
- चतुर्थ स्थान पर "D" है जिसका मतलब "Division" है, दिए गये व्यंजन में भिन्न-भिन्न क्रियाओं में सबसे पहले भाग करते है यदि दिया है तो ।
- पंचम स्थान पर "M" है जिसका मतलब "Multiplication" है, दिये गए व्यंजन में "Division" के बाद "Multiplication" (गुणा) करेंगे ।
- छठा स्थान "A" रखता है जो "Addition" (जोड़ा) से संबंधित है । Division-multiplication के बाद Addition क्रिया होती है ।
- सप्तम स्थान पर "S" है जो "Subtraction" से बना है ।

प्रश्न. सरल कीजिए ।

$$\left[3\frac{1}{4}\div\left\{1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2}-\overline{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{of }4\frac{1}{3}\right)$$

हल Step 1 – सबसे पहले सभी मिश्र भिन्नों को साधारण भिन्नों में बदलते हैं ।

$$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\overline{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{of}\frac{13}{3}\right)$$

अब VBODMAS के अनुसार

Step 2 –

$$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{3-2}{12}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{of}\frac{13}{3}\right)$$

Step 3 –

$$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{12}\right)\right\}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 4 –

$$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{30-1}{12}\right)\right\}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 5 –

$$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{29}{12}\right\}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 6 – $\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{30-29}{24}\right\}\right]\div\frac{13}{6}$

Step 7 – $\left[\frac{13}{4}\div\frac{1}{24}\right]\div\frac{13}{6}$

Step 8 – $\left[\frac{13}{4}\times 24\right]\div\frac{13}{6}$

Step 9 – $13\times 6\times\frac{6}{13}$

= 36 Ans.

बीजगणितीय सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$
5. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
6. $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$
7. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b+c)^2+(c-a)^2\right]$
8. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
9. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
10. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

    $= \frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$

यदि $a + b + c = 0$ हो तो

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

11. $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$
12. $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

समान्तर श्रेणी

वह श्रेणी जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से कोई नियत राशि जोडने अथवा घटाने से प्राप्त होता है ।

जैसे – 2, 5, 8, 11, ...

समांतर श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = a + (n - 1)$

जहाँ a = प्रथम पद

d = सार्व अंतर (द्वितीय पद – प्रथम पद)

n = पदों की संख्या

समांतर श्रेणी के n पदों का योग $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

यदि प्रथम व अंतिम पद ज्ञात हो तो $S_n=\frac{n}{2}[a+\ell]$

जहाँ $\ell =$ अंतिम पद

दो राशियों के मध्य समांतर माध्य $A=\frac{a+b}{2}$ [a, b का समांतर माध्य A है ।]

गुणोत्तर श्रेणी

यदि श्रेणी के प्रत्येक पद का उससे पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है तो गुणोत्तर श्रेणी होती है । इस निश्चित राशि को सार्वअनुपात कहते है ।

गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = a.r^{n-1}$

जहाँ a = प्रथम पद

r = सार्व अनुपात

n = पदों की संख्या

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल

$S_n=a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$; जब $r<1$ $S_n=a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$; जब $r>1$

1. दो राशियों के मध्य गुणोत्तर माध्य $G=\sqrt{ab}$
2. यदि दो धनात्मक राशियों a व b के मध्य समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य A व G है तो

   $A > G,\ \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

हरात्मक श्रेणी

किसी श्रेणी के पदों के व्युत्क्रम उसी क्रम में लिखने पर समांतर श्रेणी में हो तो उसे हरात्मक श्रेणी कहते है ।

हरात्मक श्रेणी का n वां पद

$T_n=\frac{1}{a+(n-1)d}$

हरात्मक माध्य (H) = $\frac{2ab}{a+b}$

समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य में संबंध

माना A, G तथा H दो राशियों a व b के मध्य क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य है तब

$\boxed{G^2 = AH}$ तथा $\boxed{A > G > H}$

अभ्यास प्रश्न

VBODMAS – आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 The value of $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$ of $2 \div (15 \div 8 \times 4)$ of $(28 \div 7$ of $5)$ is –

(a) $4\frac{32}{75}$ (b) $4\frac{8}{75}$

(c) $4\frac{2}{3}$ (d) $4\frac{1}{6}$

उदा.2 सरल करें

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3}\right)$$

उदा.3 सरल करें ।

$$2\frac{3}{4} \div 1\frac{5}{6} \div \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{7} \div \frac{3}{4} \text{ of } \frac{3}{7}$$

(a) $\frac{56}{77}$ (b) $\frac{49}{80}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{2}{9}$

वर्गान्तर तथा वर्गमूल आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + \sqrt{49}}}}} \text{ is}$$

(a) 3 (b) 9

(c) 7 (d) 5

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $(102)^2 = 10404$ है, तो $\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$ का मान किसके बराबर है ?

(a) 0.306 (b) 0.0306

(c) 11.122 (d) 11.322

उत्तर (d)

उदा.3 $33 - 4\sqrt{35}$ का वर्गमूल क्या है ?

(a) $\pm\left(2\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$ (b) $\pm\left(\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)$

(c) $\pm\left(\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)$ (d) $\pm\left(2\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$

उत्तर (d)

घनान्तर तथा घनमूल आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(\sqrt{4^3 + 15^2}\right)^3$ का मान क्या है ?

(a) 4913 (b) 4313

(c) 4193 (d) 3943

उत्तर (a)

उदा.2 710 में कौनसी छोटी संख्या जोडी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

(a) 29 (b) 19

(c) 11 (d) 21

उत्तर (b)

भिन्न आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$4 - \cfrac{5}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} \text{ is}$$

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$

(c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{32}$

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $2 = x + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$ है तो x का मान ज्ञात करें ।

(a) $\frac{18}{17}$ (b) $\frac{21}{17}$

(c) $\frac{13}{17}$ (d) $\frac{12}{17}$

उत्तर (b)

उदा.3 $999\frac{998}{999} \times 999$ किसके बराबर है ?

(a) 998999 (b) 999899

(c) 989999 (d) 999989

उत्तर (a)

उदा.4 $\frac{1}{5} + 999\frac{494}{495} \times 99$ का मान ज्ञात करें ।

(a) 90000 (b) 99000

(c) 90900 (d) 99990

उत्तर (b)

बीजगणितीय सूत्रों पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ के बराबर है ?

(a) $2\frac{1}{2}$ (b) $3\frac{1}{2}$

(c) $4\frac{1}{2}$ (d) $5\frac{1}{2}$

उत्तर (c)

उदा.2 $\frac{0.51 \times 0.051 \times 0.051 + 0.041 \times 0.041 \times 0.041}{0.51 \times 0.051 - 0.051 \times 0.041 + 0.041 \times 0.041}$ का मान क्या है ?

(a) 0.92 (b) 0.092

(c) 0.0092 (d) 0.00092

उत्तर (b)

श्रेणी आधारित (समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी, हरात्मक श्रेणी)

प्रश्नों के हल

उदा.1 50 से कम 3 के सभी गुणजों का योगफल ज्ञात करो ?

(a) 400 (b) 408

(c) 404 (d) 412

उत्तर (b)

उदा.2 निम्नलिखित समांतर श्रेणी में कितने पद है ?

7, 13, 19, ... , 205

उदा.3 5 के उन सभी धनात्मक गुणांकों का योग ज्ञात करें जो 100 से कम है ?

समीकरण आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक पर्यटक प्रतिदिन उतने ही रूपये खर्च करता है जितने उसके पर्यटन के दिनों की संख्या है । उसका कुल खर्च रूपये 361 है, तो ज्ञात करें कि उसका पर्यटन कितने दिनों तक चला ?

(a) 17 days (b) 19 days

(c) 21 days (d) 31 days

उत्तर (b)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गो का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

(a) 40 (b) 44

(c) 80 (d) 89

उत्तर (a)

उदा.3 जब एक दो अंकों की संख्या को उसके अंकों के योग से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 424 होता है। जब उसके अंकों को आपस में बदलने से प्राप्त संख्या को अंकों के योग से गुणा किया जाता है तो परिणाम 280 होता है। संख्या के अंकों का योग कितना है ?

(a) 7 (b) 9

(c) 6 (d) 8

उत्तर (d)

वैदिक विधि से वर्ग, घन एवं वर्गमूल,घनमूल

सिद्धांत

सूत्र निखिलम विधि – सूत्र निखिलम का अर्थ हैं की "अंतिम अंक 10 में से और बचे अंक 9 में से" प्रस्तुत करने की पद्धति निखिलम विधि कहलाती हैं। क्योंकि भारतीय गणित में अंक 9 को परम अंक अथवा ब्रह्म अंक मानते हैं तथा 10 को पूर्ण संख्या कहते हैं परन्तु यहाँ पर सूत्र का संकेत व्यवकलन संक्रिया से हैं। विनकुलन, व्यवकलन, गुणन, वर्ग, घनफल, भाग संबंधी अनेक अनुप्रयोग इस सूत्र पर ही आधारित होते हैं।

वर्ग संक्रिया – (सूत्र निखिलम आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम आधार – उपाधार आधारित विधियों द्वारा दो संख्याओ का गुणन आसानी से कर सकते हैं जब संख्याएँ परस्पर समान हो तो संख्याओ का गुणन वर्ग संक्रिया कहलाती हैं।

- जब दो संख्याएँ आधार = 10 या 100 या 10 की किसी घात के निकट होती हैं तो उनका गुणनफल सूत्र निखिलम् – आधार द्वारा बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।
- किसी प्रश्न में विचलन इतने बड़े प्राप्त हो जाते हैं कि उनका गुणा करना ही कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में उपाधार की संकल्पना की जाती है।
- उपाधार अंक का गुणनफल के बांये पक्ष से गुणा किया जाता है। दाहिना पक्ष पूर्व समान रहता है।

अतः हम निखिलम विधि द्वारा हम वर्ग ज्ञात कर सकते हैं।

आधार विधि सूत्र – $(\text{संख्या})^2$ = (संख्या + विचलन) / $(\text{विचलन})^2$

उपाधार विधि सूत्र – $(\text{संख्या})^2$ = उपाधार अंक (संख्या+विचलन) / $(\text{विचलन})^2$

Q.1 $(18)^2$

हल – आधार = 10, विचलन = 8

$(18 + 8) / (8)^2$

26/64

आधार 10 है इसलिए 1 अंक आयेगा तथा दहाई का अंक अगली संख्या में जुड़ेगा।

$\Rightarrow 26 + 6/4 \Rightarrow 32/4 = 324$

Q.2 $(97)^2$

हल – आधार = 100, विचलन = 3

$[97 + (-3)] / (-3)^2$

$= 94 / \underline{09}$

$= 9409$

Q.3 $(106)^2$

हल – आधार = 100, विचलन = 6

$(106 + 6) / (06)^2$

$112 / \underline{36}$ आधार = 100 है इसलिए दोनों अंक आयेंगे

11236

Q.4 $(38)^2$

हल – उपाधार = 40, विचलन = 2

$[38 + (-2)] / (-2)^2$

$= 4 \times 36 / 4$

$= 144 / 4 = 1444$

Q.5 $(76)^2$

हल – उपाधार = 70, विचलन = 6

$(76 + 6) / (6)^2$

$= 7 \times 82 / 36$

$= 574 / 36$

$= 57(4+3)6$

$= 5776$

Q.6 $(147)^2$

हल – उपाधार = 150, विचलन = –3

$[147 + (-3)] / (-3)^2$

$= 15 \times 144 / 09$

$= 2160 / 9$

$= 21609$

घन संक्रिया (सूत्र निखिलम आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम आधार – उपाधार आधारित विधियों द्वारा दो संख्याओ का गुणन आसानी से कर सकते हैं। जब तीन संख्याएँ परस्पर समान हो तो संख्याओ के गुणन की प्रक्रिया घन कहलाती हैं।

सूत्र निखिलम – आधार
गुणन संक्रिया के तीन खण्ड होते हैं।
प्रथम खण्ड = कोई एक संख्या + शेष दो संख्याओ के विचलन

आधार विधि
सूत्र (घनफल) = संख्या+2 × विचलन / 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3
मध्य खण्ड = दो–दो विचलनो के गुणनफलों का योग
तृतीय खण्ड = तीन विचलनो का गुणन

सूत्र निखिलम – उपाधार
निखिलम उपाधार विधि में प्रथम खण्ड में (उपाधार अंक)^2 का तथा मध्य खण्ड में (उपाधार अंक) का गुणन किया जाता हैं। आधार विधि में यही अन्तर हैं।

उपाधार विधि

सूत्र = (उपाधार अंक)^2 (संख्या + 2 × विचलन) / उपाधर अंक × 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3

सूत्र निखिलम विधि द्वारा ''घन'' (आधार विधि)
सूत्र (संख्या)^3 = संख्या + 2 × विचलन / 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3

Q.1 (12)^3

हल – आधार = 10, विचलन = 2
(12 + 2 × 2) / 3 × 4 / 8
= 16 / $\underline{12}$ / $\underline{8}$ = (16 + 1) / 2 / 8
= 1728

Q.2 (106)^3
हल – आधार = 100, विचलन = 6
(106 + 2 × 6) / 3 × 36 / 216
= 118 / $\underline{108}$ / $\underline{216}$ = (118 + 1) / 08 + 2 / 16
= 1191016

सूत्र (उपाधार विधि) = (उपाधार अंक)^2 × (संख्या + 2 × विचलन) / उपाधार अंक × 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3

Q.3 (35)^3

हल – उपाधार 30, विचलन = + 5 उपाधार अंक = 3

(3)^2 × (35 + 2 × 5) / 3 × 3 × 25 / 125
= 9 × 45 / 225 / 125
= 405 / 22$\underline{5}$ / 12$\underline{5}$ =(405 + 22) / (5+12) / 5 = 427 / 1$\underline{7}$ / 5
= 42875

Q.4 (497)^3

हल – संख्या = 497, आधार = 100, उपाधार अंक = 5, उपाधार = 500,
विचलन = –3
(497)^3 ⟹ (5)^2 × (497 + 2 × –3) / 5 × 3 × (–3)^2 / (–3)^3
= 25 ×491 / 135 / –27
= 12275 / 134 / 100–27
= 12275 / 1$\underline{34}$ / $\underline{73}$ = (12275 + 1) / 34 / 73
= 122763473

Q.5 (63)^3

उपाधार = 60, उपाधार अंक = 6,
विचलन = +3
= 6^2 × (63 + 2 × 3) / 6 × 3 ×3^2 / 3^3
= 36 × 69 / 162 / 27
= 2484 / 16$\underline{2}$ / 2$\underline{7}$ = (2484 + 16) / 2 + 2 / 7
= 250047

वर्गमूल

किसी संख्या x को उसी संख्या x से गुना किया जाए तो प्राप्त मान x^2. संख्या x की वर्ग संख्या बन जाती हैं। इसे इस तरह से समझा जाये की $x^2 = x \times x$ का ही एक युग्म होता हैं अतः x^2 का वर्गमूल x हैं।
वर्गमूल का संकेत $\sqrt{}$ हैं।

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

1. पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई का अंक 0,1,4,5,6, तथा 9 होते हैं अर्थात् जिन संख्याओ का अन्तिम अंक 2,3,7 व 8 होता हैं वो पूर्ण वर्ग नहीं होती हैं।
2. पूर्ण वर्ग संख्या में शून्यो की संख्या सम होती हैं तथा शून्यों से पूर्व की संख्या वर्ग संख्या होनी चाहिए अगर शून्यों की संख्या विषम होगी तो वो संख्या एक पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती हैं।

वर्गमूल ज्ञात करने की वैदिक विधि

1. भाग विधि द्वारा
2. द्वन्द विधि द्वारा

वर्गमूल ज्ञात करने की भाग विधि

Q.1 पूर्ण वर्ग संख्या 10329796 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	3214
	10 32 97 96
3	9
×3	132
62	124
×2	897
641	641
×1	25696
6424	25696
×4	×

संकेतः

(i) संख्या में चार जोड़े है अतः वर्गमूल में 4 अंक होंगे।
(ii) प्रथम वर्गमूल अंक = 3
(iii) शेषफल–10 – 3^2 = 1, उतारा 32 अतः नया भाज्य = 132
(iv) भाजक = 3 का दुगना = 6
(v) 132 के 13 में 6 का भाग 2 बार अतः भागफल अंक 3 के आगे 2 लिखा
(vi) भाजक 6 के आगे भी 2 लिखा अतः संशोधित भाजक = 62 है
(vii) 132–62 × 2 =132–124= 8 = शेषफल
(viii) नया भाज्य = 897 तथा नया भाजक = 32 का दुगना = 64
(ix) 89 में 64 का भाग 1 बार गया अतः भागफल अंक 32 के आगे 1 लिखा।
(x) भाजक 64 के आगे भी 1 लिखा अतः संशोधित भाजक = 641
(xi) 897 – 641 × 1 = 897 – 641 = 256, उतारा 96
(xii) अतः नया भाज्य = 25696 तथा नया भाजक = 321 का दुगना = 642
(xiii) 2569 में 642 का भाग 4 बार अतः भागफल अंक 321 के आगे 4 लिखा
(xiv) भाजक 642 के आगे भी 4 लिखा अतः संशोधित भाजक = 6424
(xv) 25696–6424 × 4 = 0, अतः शेषफल = 0 वर्गमूल = भागफल = 3214

वर्गमूल ज्ञात करने की द्वन्द्वयोग विधि

उदाहरण 1 – पूर्ण वर्ग संख्या 389376 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

12	38	9 3 7 6
		2 5 1 1
	6	24.00

(i) संख्या में तीन जोड़े है अतः वर्गमूल में 3 अंक होंगे।
(ii) प्रथम वर्गमूल अंक = 6
(iii) शेषफल = 38–6^2 = 2 को 9 से पूर्व लिखा