Toppersnotes®

Unleash the topper in you

RAJASTHAN - CET

स्नातक स्तर

समान पात्रता परीक्षा

भाग – 3

गणित एवं रीजनिंग

SIERRA INNOVATIONS

RAJASTHAN – (CET)

संख्या पद्धति
(Number System)

सिद्धांत

- सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)
  - वास्तविक संख्याएँ (Real Number)
    - परिमेय संख्याएँ (Rational Number)
      - p/q रूप (form)
        - पूर्णांक संख्या (Number)
          - ऋणात्मक
          - धनात्मक (पूर्ण संख्या)
            - शून्य (Zero)
            - प्राकृतिक संख्याएँ
              - एक (1)
              - अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers)
              - यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers)
      - दशमलव रूप (Decimal Form)
        - शांत दशमलव संख्या
        - अशांत दशमलव संख्या
    - अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Number)
  - काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Number)

सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number) (z)

Z = वास्तविक संख्या + काल्पनिक संख्या

$$\boxed{Z = a + ib}$$

जहाँ a = वास्तविक संख्या
b = काल्पनिक संख्या

वास्तविक संख्याएँ

परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

काल्पनिक संख्याएँ : जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ

ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे I से सूचित करते हैं ।
I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं ।
N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं ।
W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है ।

सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है ।
n वां पद = 2n
प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)
प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती है ।
प्रथम n विषम संख्याओं का योग $= n^2$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}+1}{2}\right\}$

प्राकृतिक संख्याएँ : प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$
प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग $= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है ।
उदाहरण – $11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference 144 – 121 = 23

अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) – जिसके सिर्फ दो form हो– 1 × संख्या
जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}
जहाँ 1 Prime Number नहीं है ।
2 एकमात्र सम Prime संख्या है ।
3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोडा है ।
1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9
25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6
1-50 तक कुल 15 Prime Number है ।
51-100 तक कुल 10 Prime Number है ।
अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है ।
1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46
1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62
1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78
1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

सह अभाज्य संख्याएँ – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो ।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)
HCF = 1

Perfect Number (परफेक्ट संख्या) – वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोडकर)
उदाहरण –6 → 1, 2, 3 → यहाँ 1+2+3 → 6
28 → 1, 2, 4, 7, 14 → 1+2+4+7+14 → 28

परिमेय (Rational) संख्याएँ – वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए ।

उदाहरण – 2/3, 4/5, $\frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

अपरिमेय **(Irrational) संख्याएँ** – इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता ।

उदाहरण – $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}$ … …

पूर्णवर्ग संख्या
↓

Unit Digit जो वर्ग के हो सकते हैं	जो नहीं हो सकते
0	2
1	3
4	7
5 or 25	8
6	
9	

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे ।

नोट – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए ।

Binary व Decimal में बदलना

1. Decimal संख्या को Binary में बदलना

किसी दशमलव संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त दशमलव संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते हैं जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है ।

उदाहरण –

89	2 × 44 = 88 ; 89 – 88 = 1
44	2 × 22 = 44; 44 – 44 = 0
22	2 × 11 = 22 ; 22 – 22 = 0
11	2 × 5 = 10 ; 11 – 10 = 1
5	2 × 2 = 4 ; 5 – 4 = 1
2	2 × 1 = 2 ; 2 – 2 = 0
1	अंतिम भागफल

अतः 89 के समतुल्य Binary number = $(1011001)_2$

2. Binary को Decimal में बदलना

Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाई ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है ।

उदाहरण –

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Now

$(1011001)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \times 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} = 89$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोडकर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी ।

उदाहरण – 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है ।

हल – $2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या = (3+1) (1+1) (1+1) (1+1)

= 4 × 2 × 2 × 2 = 32

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. जब संख्या घात (power) के रूप में हो

जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा ।

जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे । जब power, 4 से पूर्णतः कट जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे ।

2. सरलीकरण के रूप में हो

प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा ।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो

   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा ।

2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो ।

   n विषम होने पर भाजक → (a–b)

   n सम होने पर भाजक → (a – b) या (a + b) या दोनों ।

1. $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा ।
2. $a^n \div (a+1)$ $\begin{cases} \text{यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा} \\ \text{यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा} \end{cases}$
3. $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा
4. $(a^n + a) \div (a+1)$ $\begin{cases} \text{यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा ।} \\ \text{यदि n विषम हो, तो शेषफल } (a-1) \text{ होगा ।} \end{cases}$

शांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

अशांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद चलते रहते हैं और ये दो तरह के हो सकते हैं ।

0.3333, 0.7777, 0.183183183...........

- जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक । इसे भिन्न में लिखा जा सकता है ।

Non Repeating Decimal	जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती ।

आवर्ती दशमलव भिन्न

पुनरावृत्ति Repeating	वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है ।

जैसे – $\frac{1}{3} = 0.333...,\ \frac{22}{7} = 3.14285714.....$ ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं ।

इसे बार बोलते हैं ।

$$0.333..... = 0.\overline{3}$$

$$\frac{22}{7} = 3.14285714.... = 3.\overline{142857}$$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$$0.\overline{P} = \frac{P}{9} \quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99} \quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$$0.p\overline{q} = \frac{pq-p}{90} \qquad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr-pq}{900}$$

$$0.p\overline{qr} = \frac{pqr-p}{990} \qquad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs-pq}{9900}$$

<u>उदाहरण</u> –(i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625-6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524-35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

रोमन पद्धति के संकेतक

1 → I
2 → II
3 → III
4 → IV
5 → V
6 → VI
7 → VII
8 → VIII
9 → IX
10 → X
20 → XX
30 → XXX
40 → XL
50 → L
100 → C
500 → D
1000 → M

विभाजकता के नियम

2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी । जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी । जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	किसी संख्या के अन्तिम अंक को 2 से गुणा करके शेष संख्या से घटाने पर यदि संख्या 0 या 7 का गुणज हो तो अथवा किसी भी अंक का 6 के गुणज में दोहराए तो संख्या 7 से विभाज्य होगी । जैसे – 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी ।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	अंक का 6 बार दोहराए तो, या अन्तिम अंक का 4 से गुणा करके शेष संख्या में जोडने पर संख्या अगर 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी । जैसे – 222222, 17784

अभ्यास प्रश्न

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किसी संख्या का 3/4 उस संख्या के 1/6 से 7 अधिक है, तो उस संख्या 5/3 क्या होगा ?

(a) 12 (b) 18

(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b, उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$

(c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा ?

(a) 1350 (b) 1250

(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का 5/16 ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का 5/6 ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये ।

(a) 300 (b) 480

(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48

(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 64329 को जब किसी संख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते है तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224

(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2 $(3^{25}+3^{26}+3^{27}+3^{28})$ विभाजित है ।

(a) 11 (b) 16

(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है । तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706 (b) 2796

(c) 2736 (d) 2826

उत्तर (c)

इकाई अंक निकालना आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$ के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

उदा.2 $(3694)^{1739} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$ में इकाई अंक कितना है ?

(a) 0 (b) 2
(c) 3 (d) 5

प्राकृतिक संख्याओं के squre एवं cube तथा उनके योग एवं अंतर आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 20^2\right) = ?$

(a) 385 (b) 2485
(c) 2870 (d) 3255

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = ?$

दशमलव संख्या आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016 \times 0.025}{0.325 \times 0.05} \div \frac{0.1216 \times 0.105 \times 0.002}{0.08512 \times 0.625 \times 0.039} + \left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$$

उसका उत्तर $\frac{19}{10}$ था । उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2 $\frac{0.\overline{936} - 0.\overline{568}}{0.\overline{45} + 2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

शून्य की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times .... \times 98^{98} \times 99^{99} \times 100^{100}\right)$ के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200 (b) 1300
(c) 1500 (d) 1600

उदा.2 $1 \times 2 \times 3 \times .... \times 250$ को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

सबसे बडी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करना आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्न मे से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न है ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बडी संख्या है ।

$(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$

(a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1
(c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

आरोही/अवरोही क्रम आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को बढते क्रम में लिखने पर –

(a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$
(c) $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ –

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$ को अवरोही क्रम में लिखिये ?

गुणनखंडों की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left\{(127)^{127}+(97)^{127}\right\}$ तथा $\left\{(127)^{97}+(97)^{97}\right\}$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

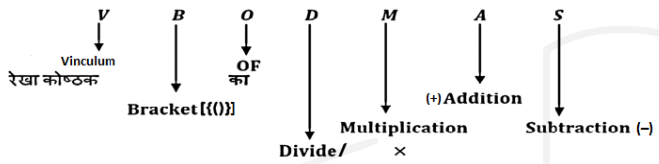
(a) 127 (b) 97

(c) 30 (d) 224

उदा.2 $\frac{(18)^{15}\times(75)^{16}\times(42)^{14}}{(35)^{12}\times(12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड है ?

सरलीकरण (Simplification)

- सरलीकरण के अंतर्गत हम दिए गये आँकडों को सरल रूप में प्रदर्शित करते है जैसे कि आँकडे भिन्न में, दशमलव में, बट्टे में, घात में तथा Mathematical Operation को हल करके या रूप बदल के किया जाता है ।
- यदि कुछ संख्या पर भिन्न-भिन्न प्रकार के Operation दिये हो तो हम उसे कैसे हल करे कि प्रश्न का उत्तर सही आये उसके लिये एक Rule होता है जिसे हम VBODMAS का Rule कहते है ।
- हम पहले कौनसा Operation करे, यह VBODMAS का Rule तय करता है ।



- इन सभी गणितीय क्रियाओं में सबसे पहले V है जिसका मतलब Vinculum (रेखा कोष्ठक) है । यदि प्रश्न में रेखा कोष्ठक है तो सर्वप्रथम उसे हल करेंगे और उसमें फिर (BODMAS) Rule कार्य करेगा
- द्वितीय स्थान पर B (Bracket) मतलब कोष्ठक है जो निम्न हो सकते है-
  1. छोटा कोष्ठक ( )
  2. मंझला कोष्ठक { }
  3. बडा कोष्ठक [ ]
- सबसे पहले छोटा कोष्ठक, फिर मंझला कोष्ठक और उसके बाद बडा कोष्ठक हल किया जाता है ।
- तृतीय स्थान पर "O" है जो कि "of" या "Order" से बना है, जिसका मतलब ''गुणा'' से या ''का'' से होता है ।
- चतुर्थ स्थान पर "D" है जिसका मतलब "Division" है, दिए गये व्यंजन में भिन्न-भिन्न क्रियाओं में सबसे पहले भाग करते है यदि दिया है तो ।
- पंचम स्थान पर "M" है जिसका मतलब "Multiplication" है, दिये गए व्यंजन में "Division" के बाद "Multiplication" (गुणा) करेंगे ।
- छठा स्थान "A" रखता है जो "Addition" (जोडा) से संबंधित है । Division-multiplication के बाद Addition क्रिया होती है ।
- सप्तम स्थान पर "S" है जो "Subtraction" से बना है ।

प्रश्न. सरल कीजिए ।

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - \overline{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3}\right)$$

हल Step 1 – सबसे पहले सभी मिश्र भिन्नों को साधारण भिन्नों में बदलते हैं ।

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \overline{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3}\right)$$

अब VBODMAS के अनुसार

Step 2 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{3-2}{12}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3}\right)$$

Step 3 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{12}\right)\right\}\right] \div \frac{13}{6}$$

Step 4 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{30-1}{12}\right)\right\}\right] \div \frac{13}{6}$$

Step 5 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{29}{12}\right\}\right] \div \frac{13}{6}$$

Step 6 – $\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{30-29}{24}\right\}\right] \div \frac{13}{6}$

Step 7 – $\left[\frac{13}{4} \div \frac{1}{24}\right] \div \frac{13}{6}$

Step 8 – $\left[\frac{13}{4}\times 24\right]\div\frac{13}{6}$

Step 9 – $13\times 6\times\frac{6}{13}$

= 36 Ans.

बीजगणितीय सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 + (a – b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a^2 – b^2)= (a + b) (a – b)$
5. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 – 2(ab + bc + ca)$
6. $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$
7. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b+c)^2+(c-a)^2\right]$
8. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 – 3ab(a + b) = (a + b) (a^2 – ab + b^2)$
9. $a^3 – b^3 = (a – b)^3 + 3ab (a – b) = (a – b) (a^2 + ab + b^2)$
10. $a^3 + b^3 + c^3 – 3abc = (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 – ab – bc – ca)$
    $= \frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$

    यदि $a + b + c = 0$ हो तो

    $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
11. $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$
12. $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

समान्तर श्रेणी

वह श्रेणी जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से कोई नियत राशि जोडने अथवा घटाने से प्राप्त होता है ।

जैसे – 2, 5, 8, 11, …….

समांतर श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = a + (n – 1)$

जहाँ a = प्रथम पद

d = सार्व अंतर (द्वितीय पद – प्रथम पद)

n = पदों की संख्या

समांतर श्रेणी के n पदों का योग $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

यदि प्रथम व अंतिम पद ज्ञात हो तो $S_n=\frac{n}{2}[a+\ell]$

जहाँ $\ell =$ अंतिम पद

दो राशियों के मध्य समांतर माध्य $A=\frac{a+b}{2}$ [a, b का समांतर माध्य A है ।]

गुणोत्तर श्रेणी

यदि श्रेणी के प्रत्येक पद का उससे पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है तो गुणोत्तर श्रेणी होती है । इस निश्चित राशि को सार्वअनुपात कहते है ।

गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = a.r^{n-1}$

जहाँ a = प्रथम पद

r = सार्व अनुपात

n = पदों की संख्या

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल

$S_n=a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$; जब $r<1$ $S_n=a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$; जब $r>1$

1. दो राशियों के मध्य गुणोत्तर माध्य $G=\sqrt{ab}$
2. यदि दो धनात्मक राशियों a व b के मध्य समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य A व G है तो

   $A > G$, $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

हरात्मक श्रेणी

किसी श्रेणी के पदों के व्युत्क्रम उसी क्रम में लिखने पर समांतर श्रेणी में हो तो उसे हरात्मक श्रेणी कहते है ।

हरात्मक श्रेणी का n वां पद

$T_n=\frac{1}{a+(n-1)d}$

हरात्मक माध्य (H) = $\frac{2ab}{a+b}$

समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य में संबंध

माना A, G तथा H दो राशियों a व b के मध्य क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य है तब

$\boxed{G^2 = AH}$ तथा $\boxed{A > G > H}$

अभ्यास प्रश्न

VBODMAS – आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 The value of $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$ of $2 \div (15 \div 8 \times 4)$ of $(28 \div 7$ of $5)$ is –

(a) $4\frac{32}{75}$ (b) $4\frac{8}{75}$

(c) $4\frac{2}{3}$ (d) $4\frac{1}{6}$

उदा.2 सरल करें

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3}\right)$$

उदा.3 सरल करें ।

$$2\frac{3}{4} \div 1\frac{5}{6} \div \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{7} \div \frac{3}{4} \text{ of } \frac{3}{7}$$

(a) $\frac{56}{77}$ (b) $\frac{49}{80}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{2}{9}$

वर्गान्तर तथा वर्गमूल आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + \sqrt{49}}}}} \text{ is}$$

(a) 3 (b) 9

(c) 7 (d) 5

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $(102)^2 = 10404$ है, तो $\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$ का मान किसके बराबर है ?

(a) 0.306 (b) 0.0306

(c) 11.122 (d) 11.322

उत्तर (d)

उदा.3 $33 - 4\sqrt{35}$ का वर्गमूल क्या है ?

(a) $\pm\left(2\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$ (b) $\pm\left(\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)$

(c) $\pm\left(\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)$ (d) $\pm\left(2\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$

उत्तर (d)

घनान्तर तथा घनमूल आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(\sqrt{4^3 + 15^2}\right)^3$ का मान क्या है ?

(a) 4913 (b) 4313

(c) 4193 (d) 3943

उत्तर (a)

उदा.2 710 में कौनसी छोटी संख्या जोडी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

(a) 29 (b) 19

(c) 11 (d) 21

उत्तर (b)

भिन्न आधारित

सिद्धांत प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$4 - \cfrac{5}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} \text{ is}$$

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$

(c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{32}$

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $2 = x + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$ है तो x का मान ज्ञात करें।

(a) $\frac{18}{17}$ (b) $\frac{21}{17}$

(c) $\frac{13}{17}$ (d) $\frac{12}{17}$

उत्तर (b)

उदा.3 $999\frac{998}{999} \times 999$ किसके बराबर है ?

(a) 998999 (b) 999899

(c) 989999 (d) 999989

उत्तर (a)

उदा.4 $\frac{1}{5} + 999\frac{494}{495} \times 99$ का मान ज्ञात करें।

(a) 90000 (b) 99000

(c) 90900 (d) 99990

उत्तर (b)

बीजगणितीय सूत्रों पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ के बराबर है ?

(a) $2\frac{1}{2}$ (b) $3\frac{1}{2}$

(c) $4\frac{1}{2}$ (d) $5\frac{1}{2}$

उत्तर (c)

उदा.2 $\frac{0.51 \times 0.051 \times 0.051 + 0.041 \times 0.041 \times 0.041}{0.51 \times 0.051 - 0.051 \times 0.041 + 0.041 \times 0.041}$ का मान क्या है ?

(a) 0.92 (b) 0.092

(c) 0.0092 (d) 0.00092

उत्तर (b)

श्रेणी आधारित (समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी, हरात्मक श्रेणी)

प्रश्नों के हल

उदा.1 50 से कम 3 के सभी गुणजों का योगफल ज्ञात करो ?

(a) 400 (b) 408

(c) 404 (d) 412

उत्तर (b)

उदा.2 निम्नलिखित समांतर श्रेणी में कितने पद हैं ?

7, 13, 19, ... , 205

उदा.3 5 के उन सभी धनात्मक गुणांकों का योग ज्ञात करें जो 100 से कम है ?

समीकरण आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक पर्यटक प्रतिदिन उतने ही रूपये खर्च करता है जितने उसके पर्यटन के दिनों की संख्या है। उसका कुल खर्च रूपये 361 है, तो ज्ञात करें कि उसका पर्यटन कितने दिनों तक चला ?

(a) 17 days (b) 19 days

(c) 21 days (d) 31 days

उत्तर (b)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गों का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

(a) 40 (b) 44

(c) 80 (d) 89

उत्तर (a)

उदा.3 जब एक दो अंकों की संख्या को उसके अंकों के योग से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 424 होता है। जब उसके अंकों को आपस में बदलने से प्राप्त संख्या को अंकों के योग से गुणा किया जाता है तो परिणाम 280 होता है। संख्या के अंकों का योग कितना है ?

(a) 7 (b) 9

(c) 6 (d) 8

उत्तर (d)

औसत (Average)

सिद्धांत

$$\text{औसत} = \frac{\text{परीक्षणों का योग}}{\text{परीक्षणों की संख्या}}$$

संख्या आधारित औसत (सूत्र)

1. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का औसत = $\frac{(n+1)}{2}$
2. प्रथम n क्रमागत सम संख्याओं का औसत = (n+1)
3. प्रथम n क्रमागत विषम संख्याओं का औसत = n
4. प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गो का औसत = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$
5. प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का औसत = $\frac{\{n(n+1)^2\}}{4}$
6. 1 से लेकर n तक की विषम संख्याओं का औसत = $\frac{(n+1)}{2}$, (जहाँ n= अन्तिम विषम संख्या)
7. 1 से लेकर n तक की सम संख्याओं का औसत = $\frac{(n+2)}{2}$, (n जहाँ = अन्तिम सम संख्या)
8. यदि समान दूरी तय करने में क्रमशः चाल a किमी./घंटा और b किमी./घंटा हो, तो औसत चाल = $\frac{2ab}{(a+b)}$ होगी ।
9. यदि समान दूरी के लिए औसत चाल a किमी./घंटा, $b\, km/hr$ किमी./घंटा तथा c किमी./घंटा हो, तो औसत चाल $= \frac{3abc}{(ab+bc+ca)}$ किमी./घंटा होगी ।
10. P व्यक्तियों में से एक व्यक्ति, जिसका औसत भार x किग्रा. है, चला जाता है के स्थान पर एक नया व्यक्ति आ जाता है, जिससे व्यक्तियों का औसत भार y किग्रा. बढ जाता है, तो नये व्यक्ति का भार = $(x + P \times y)$ किग्रा.
11. P व्यक्तियों की औसत आयु x वर्ष है । Q व्यक्तियों के और सम्मिलित हो जाने पर औसत आयु y वर्ष हो जाती है, तो नये व्यक्तियों की औसत आयु = $x + (y - x) \times \frac{(P+Q)}{Q}$ वर्ष
12. P व्यक्तियों की औसत आयु x वर्ष है । Q व्यक्तियों के बाहर चले जाने से व्यक्तियों की औसत आयु y वर्ष हो जाती है, तो बाहर जाने वाले व्यक्तियों की औसत आयु $= x - [(y - x) \times \frac{(P-Q)}{Q}]$ वर्ष
13. x बच्चों की औसत आयु y वर्ष है । यदि बच्चों की आयु में पिता की आयु जोड दी जाती है, तो उनकी औसत आयु z वर्ष हो जाती है । पिता की आयु = $z \times (x+1) - y \times x$ वर्ष
14. P छात्रों की औसत आयु x वर्ष है । एक छात्र के बाहर चले जाने पर छात्रों की औसत आयु y वर्ष हो जाती है, तो बाहर जाने वाले छात्र की औसत आयु $= P \times x - (P-1)y$ वर्ष
15. किसी संस्थान में कुल P कर्मचारियों व अधिकारियों के वेतन का औसत मान प्रतिमाह ₹ x हो तथा अधिकारियों के वेतन का औसत मान प्रतिमाह ₹ y तथा कर्मचारियों के वेतन का औसत मान प्रतिमाह ₹ z है तो, संस्था में कुल कर्मचारियों की संख्या = $\frac{(x-y) \times P}{(z-y)}$
16. यदि प्रत्येक राशि को x गुना कर दिया जाए तो औसत भी x गुना हो जाता है ।
17. गेंदबाज का औसत निकालना :-

$$\text{गेंदबाज का औसत} = \frac{\text{कुल रन}}{\text{विकेटो की संख्या}}$$

कुल = Avg $\times x$

$x =$ विकेटो की संख्या

अभ्यास प्रश्न

संख्या आधारित

सिद्धांत   प्रश्नों के हल

उदा.1 18 संख्याओं का औसत 42 है । यदि प्रत्येक संख्या को $1\frac{1}{2}$ गुना कर दिया जाए, तो परिणामी संख्या का औसत कितना होगा ?

उदा.2 प्रथम 50 प्राकृत संख्याओं का औसत कितना है ?

उदा.3 प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं के वर्गो का औसत कितना है ?

(a) 35.5 (b) 36
(c) 37.5 (d) 38.5

उदा.4 5 संख्याओं का योग 240 है । इनमें से पहली दो संख्याओं का औसत 30 है तथा अन्तिम दो