Toppersnotes
Unleash the topper in you

1st - ग्रेड

स्कूल व्याख्याता

राजस्थान लोक सेवा आयोग (RPSC)

प्रथम - प्रश्न पत्र

भाग - 3

संख्यात्मक अभियोग्यता, तार्किक ज्ञान एवं सामान्य विज्ञान

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

1 CHAPTER संख्या पद्धति / Number System

संख्या पद्धति :– किसी भी यौगिक राशि के परिणामों का बोध कराने के लिए जिस पद्धति का उपयोग होता है, संख्या पद्धति कहलाती है।

संख्याओं को उनके गुणों और विशेषताओं के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है –

- सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)
  - वास्तविक संख्याएँ (Real Number)
    - पूर्णांक (Integers)
      - ऋणात्मक (Negative)
      - धनात्मक / पूर्ण संख्याएँ (Positive/Whole Numbers)
        - शून्य (Zero)
        - प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers)
          - अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers)
          - एक (1)
          - यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers)
      - सम (Even)
      - विषम (Odd)
    - दशमलव संख्याएँ (Decimal Numbers)
      - सांत दशमलव (Terminating Decimal)
      - असांत दशमलव (Non-Terminating Decimal)
        - आवर्ती (Repeating) → परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)
        - अनावर्ती (Non-Repeating) → अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)
      - भिन्न (Fraction)
  - काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Number)

सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)

वे सभी संख्याएँ जो वास्तविक और काल्पनिक संख्याओं से मिलकर बनी होती है।

इन्हें (a + ib) के रूप में लिखा जाता है। जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ है तथा $i = \sqrt{-1}$ है।

Z = a (वास्तविक संख्या) + ib (काल्पनिक संख्या)

1. वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers): परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

I. पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ–साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती है, इसे **I** से सूचित करते हैं।

I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

(i) धनात्मक / पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते है, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती है।

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

नोट : चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

A. प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते है।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है ।

उदाहरण –

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

(a) अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) :- एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह संख्या स्वयं, उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}

- तीन अंको की सबसे छोटी अभाज्य संख्या = 101
- तीन अंको की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या = 997

जहाँ 1 Prime Number नहीं है।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

☞ **अभाज्य संख्याओं का परीक्षण :–** दी गयी संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। माना यह संख्या x है, अब x से छोटी समस्त अभाज्य संख्याओं की सहायता से दी गयी संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए।

- यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक अभाज्य संख्या होगी।

उदाहरण –

क्या 349 एक अभाज्य संख्या है या नहीं ?

हल –

349 का संभावित वर्गमूल 19 होगा और 19 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 है।

स्पष्ट है कि 349 इन सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्य नहीं है अतः 349 भी एक अभाज्य संख्या है।

सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)

HCF = 1

(b) यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers) :- वे प्राकृत संख्याएँ जो 1 या स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से भी विभाज्य हो, यौगिक संख्याएँ कहलाती है।

जैसे – 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

(ii) सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है।

n वां पद = 2n

प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

(iii) विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती है।

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}\right\}$

II. दशमलव

दशमलव वे संख्याएँ है जो दो पूर्ण संख्याओं या पूर्णांको के बीच आती है। जैसे – 3.5 एक दशमलव संख्या है जो 3 व 4 के बीच स्थित है।

- प्रत्येक दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक भिन्न को भी दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

(i) सांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

(ii) असांत दशमलव

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक।

जैसे – 0.3333, 0.7777, 0.183183183..........

ये दो प्रकार के हो सकते हैं –

A. आवर्ती दशमलव भिन्न (Repeating)

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

जैसे – $\frac{1}{3} = 0.333...,\frac{22}{7} = 3.14285714.....$

- ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं।

$0.333..... = 0.\overline{3}$ — इसे बार बोलते है।

$\frac{22}{7} = 3.14285714.... = 3.1\overline{42857}$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.\overline{P} = \frac{P}{9}$ $\quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$ $\quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.p\overline{q} = \frac{pq - p}{90}$ $\quad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$

$0.p\overline{qr} = \frac{pqr - p}{990}$ $\quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs - pq}{9900}$

उदाहरण –

(i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625 - 6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524 - 35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

- **परिमेय (Rational) संख्याएँ** – वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

उदाहरण –

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

B. अनावर्ती (Non-Repeating)

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती।

जैसे – $\pi = 3.1415926535897932...$

$\sqrt{2} = 1.41421356237...$

- **अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ** – इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण –

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}......$

भिन्न (Fraction) :- भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण चीज का कोई भाग निरूपित करती है।

जैसे एक सेब के चार भाग किये जाते है, उसमें से एक हिस्सा निकाल दिया गया तो उसे $\frac{1}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। जबकि शेष बचे भाग को $\frac{3}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जायेगा।

भिन्न दो भागों में बंटा होता है – अंश व हर

माना कोई भिन्न $= \frac{p \rightarrow \text{अंश}}{q \rightarrow \text{हर}}$

भिन्नों के प्रकार

भिन्न

- साधारण भिन्नः जिसमें अंश, हर से पूर्णतः विभाजित नहीं होता
  उदा. $= \frac{5}{6}$
  - उचित भिन्नः– अंश का मान हर की अपेक्षा कम होता है।
    जैसे :– $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{11}$
  - अनुचित भिन्नः– अंश का मान, हर की अपेक्षा अधिक होता है।
    जैसे :– $\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{23}{15}$
  - मिश्रित भिन्नः– जो एक पूर्णांक व एक भिन्न से मिलकर बनी हो।
    जैसे :– $6\frac{3}{4}, 2\frac{3}{5}$
- दशमलव भिन्नः जिसमें हर के रूप में 10 अथवा 10 की कोई घात होती है।
  उदा. $= \frac{45}{100}$
  - साधारण आवृत दशमलव भिन्नः– जिनमें दशमलव बिंदु के बाद आने वाले सभी अंको की पुनरावृत्ति हो
    जैसे :– $\frac{10}{3} = 0.333......$
  - मिश्रित आवृत दशमलव भिन्नः– जिनमें दशमलव बिंदु के 1 या 2 अंको के बाद अंको की पुनरावृत्ति हो।
    जैसे :– $\frac{17}{6} = 2.8333......$

2. **काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Numbers)**: जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

परफेक्ट संख्या (Perfect Number)

वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण –

6 → 1, 2, 3 → यहाँ 1 + 2 + 3 → 6

28 → 1, 2, 4, 7, 14 → 1 + 2 + 4 + 7 + 14 → 28

पूर्णवर्ग संख्या की पहचान

↓

इकाई अंक जो एक पूर्ण वर्ग संख्या के हो सकते है।	जो नहीं हो सकते
• 0	2 ——
• 1	3 ——
• 4	7 ——
• 5 or 25	8 ——
• 6	
• 9	

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

<u>**नोट**</u> – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवष्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

1. **Decimal संख्या को Binary में बदलना :**
   किसी डेसीमल (दस–आधारी) संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त डेसीमल (दस–आधारी) संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते है जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।
   अब सभी शेषफल को उल्टे क्रम में लिखा जाए तो परिवर्तित बाइनरी संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण –

2 × 44 = 88 ; 89 – 88 = 1 ↑	89
2 × 22 = 44 ; 44 – 44 = 0	44
2 × 11 = 22 ; 22 – 22 = 0	22
2 × 5 = 10 ; 11 – 10 = 1	11
2 × 2 = 4 ; 5 – 4 = 1	5
2 × 1 = 2 ; 2 – 2 = 0	2
	1

अतः 89 के समतुल्य **Binary number = $(1011001)_2$**

2. **Binary को Decimal में बदलना :**
   Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाई ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण –

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

अब

$(1011001)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \times 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} = 89$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण –

2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल –

$2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या = (3+1) (1+1) (1+1) (1+1)

= 4 × 2 × 2 × 2 = 32

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. **जब संख्या घात (Power) के रूप में हो**
   जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा।
   जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना षेश प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः विभाजित हो जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।

2. **सरलीकरण के रूप में हो**
   प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो
   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा।
2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

n विषम होने पर भाजक → (a–b)

n सम होने पर भाजक → (a – b) या (a + b) या दोनों।

(i) $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

(ii) $a^n \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा; यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा }

(iii) $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा

(iv) $(a^n + a) \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा। यदि n विषम हो, तो शेषफल $(a-1)$ होगा। }

रोमन पद्धति के संकेतक

1	→	I	20	→	XX
2	→	II	30	→	XXX
3	→	III	40	→	XL
4	→	IV	50	→	L
5	→	V	100	→	C
6	→	VI	500	→	D
7	→	VII	1000	→	M
8	→	VIII			
9	→	IX			
10	→	X			

विभाज्यता के नियम

संख्या	नियम
2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	यदि दी गयी संख्या के इकाई अंक का दुगुना बाकी संख्या (इकाई का अंक छोड़कर) से घटाने पर प्राप्त संख्या 7 से विभाजित है तो पूरी संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी। अथवा किसी संख्या में अंको की संख्या 6 के गुणज में हो तो संख्या 7 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	किसी संख्या में एक ही अंक 6 बार दोहराए या अन्तिम अंक को 4 से गुणा करके शेष संख्या (इकाई अंक छोड़कर) में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 17784

अभ्यास प्रश्न

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किसी संख्या का 3/4 उस संख्या के 1/6 से 7 अधिक है, तो उस संख्या 5/3 क्या होगा?

(a) 12 (b) 18

(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b, उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$

(c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

(a) 1350 (b) 1250

(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का 5/16 ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का 5/6 ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये।

(a) 300 (b) 480

(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48

(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 64329 को जब किसी सख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते है तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224

(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2 $(3^{25}+3^{26}+3^{27}+3^{28})$ विभाजित है।

(a) 11 (b) 16

(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है। तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706

(b) 2796

(c) 2736

(d) 2826

उत्तर (c)

इकाई अंक निकालना आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $416\times333+2167\times118-114\times133$ के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

कितना है ?

(a) 0 (b) 2

(c) 3 (d) 5

प्राकृतिक संख्याओं के squre/cube के योग एवं अंतर पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $(11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 20^2) = ?$

(a) 385 (b) 2485

(c) 2870 (d) 3255

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = ?$

दशमलव संख्या आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016\times0.025}{0.325\times0.05}\div\frac{0.1216\times0.105\times0.002}{0.08512\times0.625\times0.039}+\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$$

उसका उत्तर $\frac{19}{10}$ था। उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2 $\frac{0.\overline{936}-0.\overline{568}}{0.\overline{45}+2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

शून्य की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(1^1\times2^2\times3^3\times4^4\times..........\times98^{98}\times99^{99}\times100^{100}\right)$ के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200 (b) 1300

(c) 1500 (d) 1600

उदा.2 $1 \times 2 \times 3 \times ...... \times 250$ को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करने पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्न मे से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बड़ी संख्या हैं।

$(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$

(a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1

(c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

आरोही/अवरोही क्रम आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को बढ़ते क्रम में लिखने पर –

(a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ –

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$ को अवरोही क्रम में लिखिये ?

गुणनखंडों की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left\{(127)^{127}+(97)^{127}\right\}$ तथा $\left\{(127)^{97}+(97)^{97}\right\}$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

(a) 127 (b) 97

(c) 30 (d) 224

उदा.2 $\frac{(18)^{15}\times(75)^{16}\times(42)^{14}}{(35)^{12}\times(12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड है ?

2 CHAPTER आँकड़ों का प्रबन्धन

आँकड़े –

किसी को सूचना देने के लिए इकठ्ठी कि गई संख्याओं के समूह को आँकड़े कहते हैं।
ये एक विशिष्ट उद्देश्य के लिए एकत्रित किया जाता है।
जैसे – किसी कक्षा में छात्र–छात्राओं के उम्र निम्न प्रकार से हैं –
14, 12, 19, 18, 14, 16, 10, 16, 18, 11

आँकड़ों के प्रकार –

1. प्राथमिक आँकड़े 2. द्वितीयक आँकड़े

1. **प्राथमिक आँकड़े –** वे आँकड़े जो खोजकर्ता द्वारा स्वयं ही एकत्रित करें। जो स्वयं शुरूआत से लेकर अन्त तक आँकड़े इकठ्ठे करें उन्हें प्राथमिक आँकड़े कहते हैं।
   प्राथमिक आँकड़ों को निम्न विधियों से एकत्रित किया जाता है –

   (i) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान –
   - इस विधि में अनुसन्धानकर्ता स्वयं खोज क्षेत्र में जाकर लोगों से सम्पर्क करके स्वयं आँकड़े इकठ्ठे करें।
   - इस विधि में अधिक श्रम व धन खर्च होता है।
   - इसमें आँकड़े शुद्धता से मिलते हैं।

   (ii) अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान –
   - इस अनुसन्धान में आँकड़े अन्य व्यक्तियों द्वारा प्राप्त किये जाते हैं क्योंकि इसका क्षेत्र अधिक विस्तृत होता है।
   - इसमें शुद्धता नहीं या कम मिलती है।
   - बड़े व्यापक क्षेत्र में काम आती है।

   (iii) प्रगणकों द्वारा अनुसूची प्राप्त –
   - इसमें एक प्रगणकों सम्बन्धित प्रश्नों की सूची लोगों से उनके घर–घर जाकर भरवाई जाती है।
   - विशाल क्षेत्र में अच्छी मानी जाती है।
   - जनगणना भी इसी तरह की जाती है।
   - आँकड़ों की शुद्धता रहती है।

   (iv) सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर –
   इस विधि में पहले एक प्रश्नावली तैयार की जाती है। फिर ये पेपर सूचना देने वाले व्यक्ति तक पहुँचा दी जाती है और फिर वह उस प्रश्नावली का उत्तर निश्चित तिथि तक लौटा सकता है।

   (v) स्थानीय स्त्रोत द्वारा सूचना प्राप्ति –
   इस विधि में अनेक स्थान या अनुसन्धान क्षेत्र में एक विशेष व्यक्ति नियुक्त किया जाता है, जो सूचना समय–समय पर अपने अनुभव के आधार पर आँकड़े भेजता है।
   - शुद्धता की कमी।
   - मितव्यय और व्यापक क्षेत्र में।

2. द्वितीयक आँकड़े –

वे आँकड़े जो अन्य जगह से प्रकाशित आँकड़े से प्राप्त किये जाते हैं।
उदाहरण – विधार्थी के लिए जनगणना के आँकड़े द्वितीयक आँकड़े हैं।

द्वितीयक आँकड़े दो प्रकार के होते हैं –

(i) प्रकाशित आँकड़े –

ये आँकड़े समाचार पत्र व अन्य बुलेटिन तरीकों, पाठ्यपुस्तकों द्वारा प्राप्त किये जाते हैं।
उदाहरण – IMF, UNO के प्रकाशित आँकड़े।

(ii) अप्रकाशित आँकड़े –

राजकीय कार्यालय, निजी संस्थाएँ, बही खातों आदि में आँकड़े होते हैं।
इन्हें सार्वजनिक रूप से द्वितीयक आँकड़ों के रूप में प्रयोग नहीं किया जाता।

आँकड़ों की कुछ विशेषताएँ –

1. आँकड़े तथ्यों के समूह।
2. संकलन की शुद्धता।
3. आँकड़ों का संख्या में प्रस्तुत।
4. आँकड़ों का आपसी सम्बन्ध।
5. आँकड़ों का उद्देश्य।

आँकड़ों का निम्न रूप से निरूपण –

(i) चित्रालेख – इसमें आँकड़ों को चित्र या किसी अन्य वस्तुओं के रूप में दर्शाया जाता है।

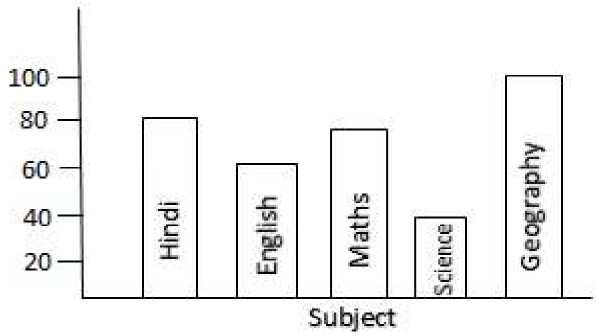
☾ = 4 विद्यार्थी

परिवहन साधन	विद्यार्थियों की संख्या
बस	☾☾☾☾
कार	☾☾☾
साइकिल	☾☾

इन आँकड़ों के उत्तर हम चित्र के माध्यम से दे सकते हैं। चित्रों के माध्यम से ही हम अन्तिम से निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

(ii) दण्ड आलेख – इसमें दण्ड क्षैतिज और उर्ध्वाधर खींचे जाते हैं। सभी दण्ड के मध्य समान दुरी होती है।

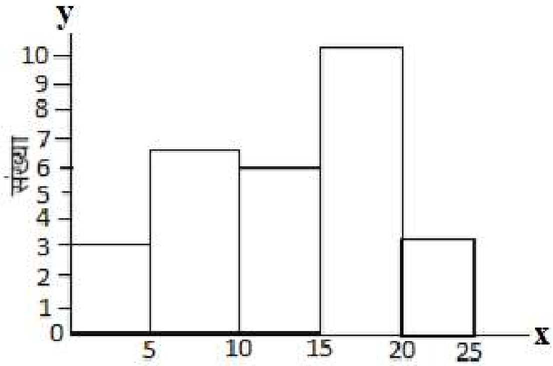
1 Unit = 10 अंक



किसी विद्यार्थी के 100 में से परीक्षा में आए हुए अंक का दण्ड आलेख।

(iii) आयत चित्र –

यह भी क्षैतिज और उर्ध्वाधर खींचा जाता है लेकिन इनके मध्य दुरी नहीं होती है।



पाई चार्ट या वृत चित्र –

यह एक वृत में बनाया जाता है जिसमें सभी आँकड़ों को 360^0 के कोणों के अलग–अलग भागों में दर्शाया जाता है।

उदाहरण – किसी कक्षा में एक विधार्थी द्वारा पाँच विषयों में अलग–अलग अंक 720 में से प्राप्त किये हैं तो निम्न प्रकार से उनका एक वृत चित्र खीचिए।

प्राप्तांक	120	90	180	120	210
विषय	हिन्दी	अंग्रेजी	गणित	विज्ञान	सा. विज्ञान

हल – हिन्दी = $\frac{\text{प्राप्तांक}}{\text{कुल अंक}} \times 360^\circ = \frac{120}{720} \times 360^\circ = 60^\circ$

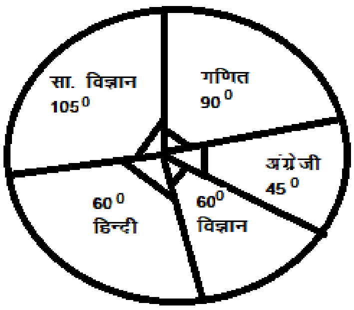
अंग्रेजी = $\frac{90}{720} \times 360^\circ = 45^\circ$

गणित = $\frac{180}{720} \times 360^\circ = 90^\circ$

विज्ञान = $\frac{120}{720} \times 360^\circ = 60^\circ$

सा. विज्ञान = $\frac{210}{720} \times 360^\circ = 105^\circ$

वृत चित्र –



बारम्बारता –

किसी भी सारणी में कोई अंक बार–बार आ रहा है या कोई निश्चित अंक कितनी बार आ रहा है। वह उसकी बारम्बारता होती है।

जैसे – 1, 7, 4, 5, 9, 6, 8, 4, 2, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 6, 8, 7, 2, 8

उपयुक्त आँकड़ों की बारम्बारता सारणी बनाइए।

संख्या	**बारम्बारता**
1	3
2	2
3	1
4	3
5	2
6	3
7	2
8	4
9	2

सबसे ज्यादा बारम्बारता 8 की है और चार बार आई है और सबसे न्यूनतम बारम्बारता 3 की है जो एक बार आया है।

परास या परिसर –

किसी भी आँकड़ों के अधिकतम संख्या और न्यूनतम संख्या का अन्तर ही प्रसार/परास/परिसर कहलाता है।

उदाहरण –

एक सर्वे में निम्न आँकड़े प्राप्त हुए जो 64, 95, 99, 68, 42, 81, 90 तो इनका परास बताइए।

हल – सबसे बड़ी संख्या – सबसे छोटी संख्या

परास/प्रसार = 99 – 42 = 57

अन्तराल	**प्राप्तांक**	**बारम्बारता**	**मिलान चिन्ह**
0 – 20	10	4	IIII
20 – 40	30	15	𝍸 𝍸 𝍸
40 – 60	50	20	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
60 – 80	70	16	𝍸 𝍸 𝍸 I
80 – 100	90	6	𝍸 I

वर्ग – प्रत्येक आवृत सारणी के अन्तराल को वर्ग कहते हैं।

यहाँ वर्ग – 0 – 20, 20 – 40 इत्यादि हैं।

- **बारम्बारता** – यहाँ कोई संख्या कितनी बार आई है। वह उसकी बारम्बारता होगी।

  यहाँ बारम्बारता – 0 – 20 = 4 है।

- **मिलान चिन्ह –** मिलान चिन्ह जिसे कोई बारम्बारता कितनी बार आई है उसके लिए चार रेखाओं और पाँचवीं रेखा काटती हुई दर्शाई जाती है।

  उदाहरण – 4 = IIII

  12 = 𝍸 𝍸 II

- **वर्ग सीमाएँ** – ये दो प्रकार के हैं।

1. **निचली सीमा –** वर्ग अन्तराल में वर्ग की प्रथम संख्या को निचली सीमा कहा जाता है।
   यहा निचली सीमा – 20 – 40 में से 20 है।
   जिसे l_1 से दर्शाया जाता है।

2. **ऊपरी सीमा –** यह वर्ग अन्तराल में दूसरी संख्या को ऊपरी सीमा से दर्शाया जाता है।
   जैसे – वर्ग अन्तराल 20 – 40 में से ऊपरी सीमा 40 है जिसे l_2 से दर्शाया जाता है।

बारम्बारता बंटन सारणी –

यह बंटन सारणी दो प्रकार की होती है –

1. **सतत बंटन सारणी –** इस सारणी में वर्ग अन्तरालों की संख्या लगातार होती है।
   जैसे – 0 – 10, 10 – 20, 20 – 30, ... आदि।

2. **असतत बंटन सारणी –** इस सारणी में वर्ग अन्तरालों की संख्या लगातार नहीं होती।
   जैसे – 0–5, 6–10, 11–15, 16–20 .... आदि।

टिप्पणी – इसे सतत सारणी बनाने के लिए प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा और द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा को जोड़कर 2 का भाग दिया जाता है।

जैसे – $\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$

अतः सारणी वर्ग अन्तराल = 0 – 5.5, 5.5 – 10.5 ....

3 CHAPTER

सांख्यिकी (केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप) (Statistics)

केन्द्रीय प्रवृत्ति

दिये गये आँकड़ो में श्रेणी के अधिकांष पद जहाँ पर या जिस आँकड़े के आस–पास केन्द्रित होते है, उसे आँकड़ो की केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते है ।

समान्तर माध्य

जब केवल कुछ दिए गये आँकड़ो की समान्तर माध्य ज्ञात करना हो, तो सभी आँकड़ो के योगफल में आँकड़ो की संख्या का भाग देने से जो संख्या प्राप्त होती है, उसे समान्तर माध्य या माध्य कहते है ।

जैसे – $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots. x_n$ n आँकड़े है तो इनका माध्य

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi$$

जहाँ $\overline{x}$ = समान्तर माध्य, Σ = योगफल का प्रतीक

टिप्पणी – $\sum$ ग्रीक वर्णमाला का अक्षर है तथा इसे 'सिग्मा' उच्चारित करते है तथा गणित में इसे योग की प्रक्रिया दिखाने के लिये प्रयोग में लाया जाता है ।

जैसे –

$$\sum_{i=1}^{25} y_i \text{ ¾ } y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{25}$$

इसे औसत भी कहते है, अर्थात्

$$\textbf{समान्तर माध्य} = \frac{\textbf{आँकडों का योग}}{\text{आँकडों की संख्या}}$$

उदाहरण के लिए किसी विद्यालय में कक्षा दसवीं में अध्ययन करने वाले 10 छात्रों के गणित विशय में प्राप्तांक क्रमषः 7, 8, 5, 6, 7, 8, 9, 4, 5, 6 अंक है तो प्राप्तांकों का औसत

$$= \frac{\text{प्राप्तांकों का योग (आँकडों का योग)}}{\text{छात्रों की संख्या (आँकडों की संख्या)}}$$

$$= \frac{7+8+5+6+7+8+9+4+5+6}{10}$$

$$= \frac{65}{11} = 6.5 \text{ अंक}$$

- यदि आँकड़े बारम्बारता बंटन के रूप में हो तो – जैसे – $x_1, x_2, x_3 \ldots.. x_n$ आँकड़ो की बारम्बारता क्रमषः $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_n$ हो तो

$$\text{माध्य } \overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots..f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots.f_n} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

उदा.1 निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ?

x	1	2	3	4	5	6
f	2	5	6	4	2	2

हल – समान्तर माध्य की गणना

x	f	fx
1	2	2
2	5	10
3	6	18
4	4	16
5	2	10
6	2	12
	$\sum f = 21$	$\sum fx = 68$

अतः समान्तर माध्य $(\overline{x})$ ¾ $\frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{68}{21} = 3.238$

- वर्ग–अंतराल के रूप में बारंबारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात करना –

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N} \text{ (N = समस्त बारंबारताओं का योग)}$$

यहाँ x का मान प्रत्येक वर्ग अंतराल के मध्यमान को निकालकर प्राप्त करते है ।

उदा.2 निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ?

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
छात्रों की संख्या	5	8	20	14	3

हल – यहाँ हर वर्ग का मध्यमान निकालते है ।

$$\left(x = \frac{\text{निम्न सीमा + उच्च सीमा}}{2}\right)$$

प्राप्तांक	मध्यमान (x_i)	f_i	f_ix_i
0 – 10	5	5	25

10 – 20	15	8	120
20 – 30	25	20	500
30 – 40	35	14	490
40 – 50	45	3	135

$\Sigma f_i = N = 50$ $\qquad \Sigma f_i x_i = 1270$

अतः समान्तर माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \frac{1270}{50} = 25.4$ अंक

माध्यिका (Median)

जब विचर के मानों को आरोही व अवरोही क्रम में रखकर मध्य पद का मान देखा जाता है तो वह माध्यिका कहलाता है ।

(i) असमत् (व्यक्तिगत) बंटन की माध्यिका

- दिये गये सभी पदो को आरोही या अवरोही क्रम में लिखते है ।
- इनकी क्रम संख्या लिख देते है ।
- निम्न सूत्र से माध्यिका ज्ञात करते है –

$M = \frac{n+1}{2}$ **वाँ पद** (यदि n विशम हो)

$M = \frac{n}{2}$ **वाँ पद** + $\frac{n+1}{2}$ **वाँ पद** (यदि n सम हो)

उदाहरण के लिये कक्षा A के 9 छात्रों के प्राप्तांक 10,15,12,18,17,18,15,16,19 है तथा कक्षा B के 8 छात्रों के प्राप्तांक 19,15,18,14,17,16,15,15 है । इनको आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर –

A : 10 12 15 15 16 17 18 18 19
B : 14 15 15 15 16 17 18 18

A की माध्यिका = मध्य पद (5 वाँ पद) = 16 अंक

B की माध्यिका = मध्य पदों का औसत $\left(\frac{4th+5th}{2}\right)$

$= \frac{15+16}{2} = 15.5$ अंक

(ii) वर्गीकृत बारंबारता बंटन की माध्यिका

- वह वर्ग अंतराल जिसकी संचयी आवृत्ति N/2 से ठीक अधिक है, माध्यक का वर्ग होगा तथा

माध्यिका (M) = $\ell + \left(\frac{N/2 - C}{f}\right) \times h$

जहाँ ℓ = माध्यक वर्ग अंतराल की निम्न सीमा

N = Σf_i (कुल बारंबारता)

C = माध्यक वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारंबारता

h = माध्यक वर्ग का अंतराल

f = माध्यक वर्ग की बारंबारता

उदा.3 निम्न बारम्बारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।
हल – संचयी बारम्बारता सारणी बनाने पर

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
f_i	6	20	44	26	3	1

वर्ग	f_i	संचयी बारम्बारता cf
10-25	6	6
25-40	20	26
40-55	44	70
55-70	26	96
70-85	3	99
85-100	1	100

N = 100

यहाँ $\frac{N}{2} = 50$ अतः माध्यिका वर्ग अंतराल ''40–50'' है तथा

यहाँ संगत $\ell = 40, C = 26, h = 15$ o $f = 44$

माध्यिका (M) = $\ell + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$

$= 40 + \frac{50-26}{44} \times h$

$= 40 + \frac{24}{44} \times 15$

$= 48.18$

अतः माध्यिका 48.18 है ।

बहुलक

किसी बंटन में प्रेक्षणो के जिस मान की बारम्बारता अधिकतम हो उसे बहुलक या मोड कहते है ।

(i) व्यक्तिगत श्रेणी – वह पद मूल्य जिसकी बारंबारता सबसे अधिक है ।

(ii) वर्गीकृत बारंबारता बंटन – सबसे अधिक बारंबारता वाला वर्ग, बहुलक वर्ग कहलाता है तथा

बहुलक = $\ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

जहाँ, ℓ = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पूर्व के वर्ग की बारंबारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक पष्चात् के वर्ग की बारंबारता

h = बहुलक वर्ग का अंतराल

उदा.4 निम्न बारम्बारता बंटन से बहुलक ज्ञात कीजिए ।

वर्ग	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
f_i	6	20	44	26	3	1

हल – यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता 44, वर्ग '40–50' की है ।

इस प्रकार बहुलक वर्ग = 40–50

पुनः $l = 40, f_1 = 44, f_0 = 20, f_2 = 26$ rFkk $h = 15$

सूत्र के अनुसार बहुलक

$$= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{44-20}{88-20-26}\right) \times 15 = 48.57$$

अतः अभीश्ट बहुलक = 48.57

माध्य, माध्यिका व बहुलक में संबंध

(1) बहुलक = 3 × माध्यिका – 2 × माध्य
इस सूत्र में किन्ही भी दो का मान ज्ञात होने पर तीसरी राषि का मान निकाल सकते है ।

(2) बहुलक = माध्य – 3 (माध्य – माध्यिका)

(3) बहुलक = माध्यिका – 2/3 (माध्य – बहुलक)

अभ्यास प्रश्न

समान्तर माध्य

प्रश्नों के हल

Q.1 एक कक्षा के छात्रों द्वारा प्राप्त किये गये अंकों का अंकगणितीय माध्य 58 है । उनमें से 20% द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य 60 था और 30% द्वारा प्राप्त अंको का माध्य 40 था । बाकी बचे छात्रों द्वारा प्राप्त अंको का माध्य क्या था ?

(a) 65 (b) 66

(c) 68 (d) 70

उत्तर –(c)

Q.2 यदि पाँच प्रेक्षणों $x, x+3, x+4, x+6$ तथा $x+7$ का माध्य 11 है, तो अंतिम तीन प्रेक्षणों का माध्य होगा ?

(a) 12 (b) 12.67

(c) 19 (d) 13

उत्तर –(b)

माध्यिका

प्रश्नों के हल

Q.1 प्रथम दस अभाज्य संख्याओं की माध्यिका ज्ञात कीजिए ?

(a) 12 (b) 13

(c) 11 (d) 9

उत्तर –(a)

Q.2 1.9, 8.4 3.6, 5.8 की माध्यिका (Median) ज्ञात कीजिए ।

(a) 5.1 (b) 4.7

(c) 5.2 (d) 5.6

उत्तर –(b)

Q.3 67, 34, 57, 32, 12, 92, 51, 62, 62, 57, 93 और 2 का माध्यिका ज्ञात करें ?

(a) 56.5 (b) 32

(c) 57 (d) 62

उत्तर –(c)

बहुलक

प्रश्नों के हल

Q.1 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ आँकड़ो का बहुलक क्या है ?

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

उत्तर –(b)

Q.2 यदि निम्नलिखित आँकड़ो का बहुलक 52 है, तो x का मान ज्ञात करें ।

52, 45, 49, 54, 56, x-3, 56

(a) 52 (b) 55

(c) 54 (d) 56

उत्तर –(b)

Q.3 निम्न आँकड़ो का बहुलक (मोड़) ज्ञात करें –

25, 45, 58, 87, 45, 54, 65, 12, 25, 59, 42, 60

(a) 25 (b) 45

(c) 45, 54 (d) 45, 25

उत्तर – (d)

माध्य, माध्यिका व बहुलक में संबंध

प्रश्नों के हल

Q.1 यदि बहुलक का मान 14 है और अंक गणितीय माध्य (Arithmetic Mean) 5 है, तो माध्यिका का मान होगा ?

(a) 8 (b) 18

(c) 12 (d) 14

उत्तर – (a)

Q.2 यदि माध्यिका 12 है और माध्य 10 है तो बहुलक ज्ञात कीजिए –

(a) 17 (b) 16

उत्तर – (b)

माध्य विचलन

सिद्धांत

माध्य विचलन को औसत विचलन (Average Deviation) के नाम से जाना जाता है। माध्य विचलन वह विचलन है, जो किसी वितरण या प्रतिदर्श के मध्यमान (Mean) से व्यक्तिगत प्राप्तांकों के विचलनों का औसत है अर्थात् माध्य विचलन किसी वितरण में सब विभिन्न प्राप्तांको का उनके मध्यमान से विचलनों का औसत होता है।

परिभाषा

रेबर (Reber) के अनुसार –"औसत विचलन का तात्पर्य प्रत्येक प्राप्तांक तथा मध्यमान के बीच अंतरों का अंकगणितीय मध्यमान से है।"

गैरट (Garrett) के अनुसार– "औसत विचलन या मध्यमान विचलन किसी एक श्रृंखला से विभिन्न प्राप्तांको का उनके मध्यमान से विचलन का औसत होता है।"

किसी वितरण को मध्यमान से प्रत्येक प्राप्तांक के विचलन के योगफल को प्राप्तांकों की कुल संख्या (N) से भाग देने पर जो भागफल होता है, उसे माध्य विचलन कहते हैं। माध्य विचलन दो प्रकार के आँकड़ों की गणना करता है–

अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए (Ungrouped Data)

माध्य विचलन (Mean Deviation or M.D) = $\sum|d|/N$

d = मध्यमान से प्राप्त अंकों का विचलन

$|d|$ = d के दोनों ओर खींची रेखा का अर्थ है कि धनात्मक तथा ऋणात्मक चिन्हों पर ध्यान नहीं देना है।

N = प्राप्तांकों की संख्या

$\sum|d|$ = मध्यमान से विचलनों का योग

वर्गीकृत आँकड़ों के लिए (Grouped Data)

वर्गीकृत आँकड़ों में माध्यम विचलन हेतु निम्नलिखित कार्य करते हैं –

1. वर्गान्तरों का मध्य बिंदु X निकालते हैं।
2. ΣfX/N ज्ञात करके मध्यमान निकालते हैं।
3. विचलन d ज्ञात करते हैं।
4. f×d निकाल कर Σfd ज्ञात करते हैं।

माध्य विचलन (Mean Deviation or M.D) = $\sum|fd|/N$

Σ = योग

$|fd|$ = आवृत्ति तथा विचलन का

N = प्राप्तांकों की संख्या

उदा. 1 एम.पी.एड. के छात्रों के प्राप्तांकों द्वारा माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक– 32, 22, 18, 20, 21, 33, 25, 29

हल –

प्राप्तांक (X)	मध्यमान से विचलन (d = X-M)	विचलन ($\lvert d \rvert$)
32	32-25 = 7	7
22	22-25 = -3	3
18	18 – 25 = -7	7
20	20 – 25 = -5	5
21	21 – 25 = -4	4
33	33 – 25 = 8	8
25	25 – 25 = 0	0
29	29 – 25 = 4	4
ΣX = 200		$\sum\lvert d\rvert$ **= 38**

X का माध्य = ΣX/N

= 200/8

= 25

माध्य विचलन (Mean Deviation or M.D) = $\sum|d|/N$

M.D = 38/8

M.D = 4.75

उदा. 2 निम्नलिखित सारणी द्वारा माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्गान्तर (C.I)	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
आवृत्ति (f)	1	2	4	2	1	5

fx X का माध्य = ΣfX/N

= 395/15

fx X का माध्य = 26.33 माध्य विचलन (Mean Deviation or M.D) = $\sum|fd|/N$

M.D = 110.67/15

M.D = 7.378

उदा. 3 माध्य से विचलन ज्ञात करो? (माध्य विचलन)

छात्र	A	B	C	D	E	F	G
प्राप्तांक	18	20	25	32	35	36	37

हल –

छात्र	प्राप्तांक (X)	माध्य से विचलन $\|d\overline{X}\|$
A	18	$\|18-29\|=\|-11\|=11$
B	20	$\|20-29\|=\|-9\|=9$
C	25	$\|25-29\|=\|-4\|=4$
D	32	$\|32-29\|=\|+3\|=3$
E	35	$\|35-29\|=\|+6\|=6$
F	36	$\|36-29\|=\|+7\|=7$
G	37	$\|37-29\|=\|+8\|=8$
N = 7	**ΣX = 203**	$\sum\|d\overline{X}\|=48$

माध्य $=\frac{\sum X}{N} \Rightarrow \frac{203}{7}=29$

माध्य विचलन $=\frac{\sum|d\overline{X}|}{N} \Rightarrow \frac{48}{7}=6.89$

उदा. 4 दिये गये आँकड़ो का माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

57, 64, 43, 67, 49, 59, 44, 47, 61, 59

हल –

माध्य = $\frac{\text{आँकड़ो का योग}}{\text{आँकड़ो की संख्या}}$

वर्गान्तर (C.I)	मध्य बिंदु X	आवृत्ति (f)	f . X	d = X –M	$\|fd\|$
10-14	12	1	12	12-26.33 =-14.33	14.33
15-19	17	2	34	17-26.33=-9.33	18.66
20-24	22	4	88	22-26.33=-4.33	17.32
25-29	27	2	54	27-26.33=0.67	1.34
30-34	32	1	32	32-26.33=5.67	5.67
35-39	37	5	175	37-26.33=10.67	53.35
		N = 15	ΣfX =395		$\sum\|fd\|$ = 110.67

$\frac{57 + 64 + 43 + 67 + 49 + 59 + 44 + 47 + 61 + 59}{10}$

माध्य $=\frac{550}{10}=55$

विचलन = |आँकड़ा–माध्य|

विचलनों का योग

$=|57-55|+|64-55|+|43-55|+|67-55|+|49-55|$
$+|59-55|+|44-55|+|47-55|+|61-55|+|59-55|$

$=2+9+12+12+6+4+11+8+6+4$

= 74

माध्य विचलन = $\frac{\text{विचलनों का योग}}{\text{आँकड़ों की संख्या}}$

$=\frac{74}{10}=7.4$

उदा. 5 दिये गये आँकड़ों का माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

आकार (x)	1	3	5	7	9	11	13
बारम्बारता (f)	2	4	3	6	5	3	2

हल –

आकार (x)	**बारम्बारता (f)**	**fx**	**विचलन** $\|M-x\|f$
1	2	$1 \times 2 = 2$	$\|1-7\|\times 2 \Rightarrow 12$
3	4	$3 \times 4 = 12$	$\|3-7\|\times 2 \Rightarrow 8$
5	3	$5 \times 3 = 15$	$\|5-7\|\times 2 \Rightarrow 4$
7	6	$7 \times 6 = 42$	$\|7-7\|\times 6 \Rightarrow 0$
9	5	$9 \times 5 = 45$	$\|9-7\|\times 5 \Rightarrow 10$
11	3	$11 \times 3 = 3$	$\|11-7\|\times 3 \Rightarrow 12$
13	2	$13 \times 2 = 26$	$\|13-7\|\times 2 \Rightarrow 12$
	N = 25	$\sum fx$ **= 175**	$\sum\|(M-x)\|f = 58$

माध्य $= \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{175}{25} = 7$

माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|M-x|f}{N} = \frac{58}{25} = 2.32$

उदा. 6 दिये गये आकड़ो का माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ?

वर्ग अन्तराल (x)	4–8	8–12	12–16	16–20
बारम्बारता f	3	6	4	7

वर्ग अन्तराल (x)	बारम्बारता (f)	$f\,x_i$	विचलन $\|M-\bar{x}\|f$
4-8	3	$6 \times 3 = 18$	$\|13-6\|\times 3 = 21$
8-12	6	$10 \times 6 = 60$	$\|13-10\|\times 6 = 18$
12-16	4	$14 \times 4 = 56$	$\|13-14\|\times 4 = 4$
16-20	7	$18 \times 7 = 126$	$\|13-18\|\times 7 = 35$
	N = 20	$\sum fx_i = 260$	$\sum\|M-\bar{x}\|f = 78$

$\frac{4+8}{2} = 6, \quad \frac{8+12}{2} = 10, \quad \frac{12+16}{2} = 14, \quad \frac{16+20}{2} = 18$

माध्य $= \frac{\Sigma fx_i}{N} = \frac{260}{20} = 13$

माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|M-\bar{x}|f}{N} = \frac{78}{20} = 3.9$