



हरियाणा

P.G.T.

हरियाणा लोक सेवा आयोग (HPSC)

Mathematics

---

Volume - 1



# CONTENTS

## Mathematics

### PART – I (Senior Secondary Level)

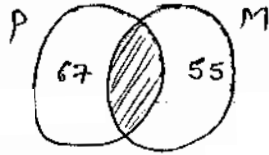
1.	<b>Sets, Relations and Functions:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Sets and their types</li><li>• Basic Properties of Sets</li><li>• Relations</li><li>• Functions</li></ul>	1
2.	<b>Limit, Continuity and Differentiability:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Limit</li><li>• Continuity</li><li>• Differentiability</li></ul>	66
3.	<b>Complex and Vector Algebra:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Complex Numbers</li><li>• Algebra of Complex Numbers</li><li>• Polar Representation of Complex Numbers</li><li>• Square Roots of Complex Numbers</li><li>• Vectors and Scalars</li><li>• Types of Vectors</li><li>• Vector Algebra</li><li>• Scalar/dot product of two vectors</li><li>• Vector/Cross product of two vectors</li><li>• Scalar Triple Products</li></ul>	107
4.	<b>Differential Calculus:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Limits and algebra of limits</li><li>• Derivatives</li><li>• Algebra of derivatives of functions</li><li>• Derivatives of polynomial and trigonometric functions</li></ul>	121

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Derivatives of implicit and explicit functions</li> <li>• Second order derivatives</li> <li>• Increasing and Decreasing functions</li> <li>• Problems with solutions</li> </ul>	
5.	<b>Integral Calculus:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Formulas of Integration</li> <li>• Integration of Function by the method of substitution</li> <li>• Definite Integral</li> <li>• Some important integration</li> </ul>	135
6.	<b>Differential Equation:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Order of a differential equation</li> <li>• Degree of a differential equation</li> <li>• Solution of differential equations of the first order and first degree</li> </ul>	170
7.	<b>Permutations and Combinations:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fundamental Principle of Multiplication</li> <li>• Permutation</li> <li>• Combination</li> <li>• Binomial Theorem for positive integers</li> <li>• General and middle terms in binomial expansion</li> </ul>	182
8.	<b>Matrices:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Types of Matrices</li> <li>• Operations on Matrices</li> <li>• Invertible Matrices</li> </ul>	192
9.	<b>Two Dimensional Geometry:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Straight-line</li> <li>• Circle</li> <li>• Parabola</li> <li>• Ellipse and Hyperbola</li> </ul>	212
10.	<b>Application of Derivatives and Integrals:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tangent and Normal</li> <li>• Maxima and Minima</li> </ul>	277

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Area under simple curves and area between simple Curves</b></li> </ul>	
11.	<b>Statistics:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Mean, Mode, Median</b></li> <li>• <b>Measures of Dispersion (Range, Mean Deviation, Variance and Standard Deviation)</b></li> <li>• <b>Probability and their elementary laws</b></li> <li>• <b>Conditional probability</b></li> </ul>	295

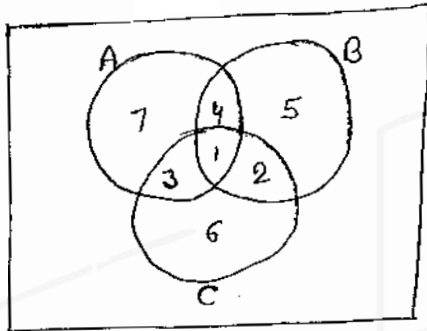
# Sets, Relations and Functions

Q.19)



$$\begin{aligned}
 P(\text{केवल भं.}) &= 100 - P(M) \\
 &= 100 - 55 = 45
 \end{aligned}$$

Universal Set  $\Rightarrow$

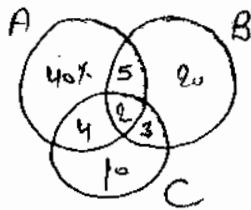


$$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

- (i)  $n(\text{केवल } A) = 7$
- (ii)  $n(\text{only } B) = 5$
- (iii)  $n(\text{only } C) = 6$
- (iv)  $n(\text{ठीक एक समुच्चय में विद्यमान अवयव}) = 7 + 5 + 6$
- (v)  $n(\text{ठीक दो समुच्चय में विद्यमान अवयव}) = 4 + 3 + 2$

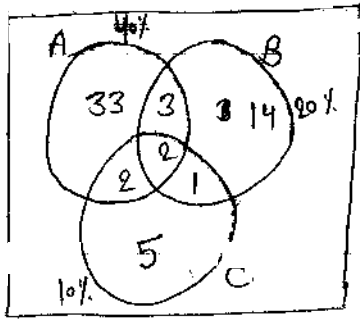
Q.14)

+



only A समाचार पत्र वाला परिवारों सं. =  $1000 \times \frac{40}{100}$

$$\begin{aligned}
 &= 400 - \\
 &= 5 \\
 &1000 \times \frac{5}{100} = 50, \quad 1000 \times \frac{20}{100} = 20, \quad 1000 \times \frac{4}{100} = 40
 \end{aligned}$$



- A: 40
- B: 20
- C: 10
- AB: 5
- BC: 3
- CA: 4
- ABC: 2

(i)  $n(\text{केवल अक्षर A पढ़ने वाले परिवार}) = 33$   
 $[40 - (3+2+2)] = 33 \quad \frac{1000 \times 33}{100}$

(ii)  $n(\text{ठीक एक अक्षर पढ़ने वाले}) = 52$   
 $\Rightarrow [33 + 14 + 5 = 52] \quad \frac{1000 \times 52}{100} = 520$

(iii)  $n(\text{ठीक 2 अक्षर पढ़ने वाले}) = 60$   
 (क्षेत्र  $3+2+1=6$ )  $\frac{1000 \times 6}{100} = 60$

(iv)  $n(\text{कम से कम एक अक्षर पढ़ने वाले}) = 600$

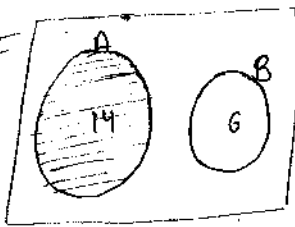
$$\frac{1000 \times 60}{100} = 600$$

$40 \quad 33+14+10 =$   
 $33+3+2+2+1+14+5 = 60$

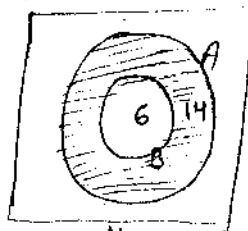
(v)  $n(\text{अक्षर न पढ़ने वाले}) = 1000 - 600 = 400$   
 या 40%

Q) If  $n(A) = 14$ ,  $n(B) = 6$ ,  $n(A \cup B) = x$  &  $n(A \cap B) = y$   
 तो then  $x$  व  $y$  के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करो ?

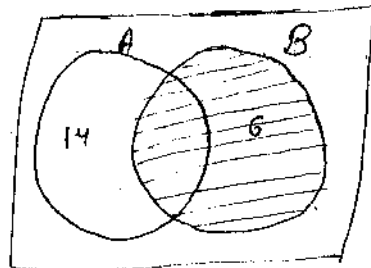
Sol<sup>n</sup>



$A \cap B = \phi$   
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$   
 कि या है:



$A \cup B = A$  व  $A \cap B = B$   
 इसमें सबसे कम element है



$x$  का न्यूनतम मान  $\Rightarrow n(A) = 14$

$x$  का अधिकतम मान  $\Rightarrow n(A) + n(B) = 14 + 6 = 20$

अतः  $x$  का संभव रूप  $\Rightarrow 14 \leq x \leq 20$

$$\max\{n(A), n(B)\} \leq n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$$

जब  $A \cap B = \emptyset$  तब  $n(A \cap B) = 0$

$\therefore y$  का न्यूनतम मान  $= 0$

$y$  का अधिकतम मान  $= 6$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 6$$

अतः संभव रूप  $\Rightarrow$

$$0 \leq n(A \cap B) \leq \min\{n(A), n(B)\}$$

Q. 11.) Let given Set A व B हैं।

	A	B
अवयव	$m$	$n$
उपसमूह	$2^m$	$2^n$

$$\therefore 2^m - 2^n = 56$$

Now by option  $\Rightarrow 2^6 - 2^3 = 56$

## समुच्चय (Sets)

समुच्चय  $\rightarrow$  वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं।

$\rightarrow$  समुच्चय में संग्रहित वस्तुएँ उसके सदस्य या तत्व कहलाते हैं।

$\rightarrow$  यदि  $a$  समुच्चय  $A$  का सदस्य है, तो इसे प्रतीकात्मक रूप से  $a \in A$  लिखते हैं ( $a$  belongs to  $A$ )। यदि  $b$  समुच्चय  $A$  का सदस्य नहीं है तो इसे  $b \notin A$  लिखते हैं ( $b$  not belongs to  $A$ )।

संकेतन (Notation): समुच्चयों को मुख्यतः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े

अक्षरों से निरूपित किया जाता है।

जैसे -  $A, B, X$  आदि

$N$  - प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

$Z$  - पूर्णाकों का समुच्चय

$Z^+$  - धन पूर्णाकों का समुच्चय

$Z^-$  - ऋण पूर्णाकों का समुच्चय

$R$  - वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

$C$   $\rightarrow$  सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

$Q$   $\rightarrow$  परिमेय संख्याओं का समुच्चय



## समुच्चय का निरूपण

1. रोलर/सारणीबद्ध

→ सभी अवयवों को Comma द्वारा पृथक करते हुए बिना पुनरावृत्ति के  $\{ \}$  के अन्दर लिखते हैं।

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

यहाँ  $3 \in A$  परन्तु  $4 \notin A$

2. निर्माता रूप

→ इसमें मसले कोष्ठक " $\{ \}$ " के अन्दर अवयवों को सूचीबद्ध करने के बजाय उनके गुणधर्म लिखते हैं।

$$N = \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है}\}$$

$$Z = \{x : x \text{ एक पूर्णांक है}\}$$

### समुच्चय के प्रकार !

(1) एकल समुच्चय :- जिसमें ~~अवयव~~ केवल एक अवयव हो।

जैसे.  $A = \{2\}$

$$B = \{\emptyset\}$$

$\{0\}$ , एक एकल समुच्चय है।

(2) रिक्त समुच्चय :- वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं हो।

जैसे  $\emptyset$  या  $\{ \}$  से प्रदर्शित करते हैं।

जैसे  $\{x : x \in N, 9 < x < 10\} = \emptyset$

$$\{x : x \in R, x^2 = -8\} = \emptyset$$

(3) परिमित व अपरिमित समुच्चय: वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित हो, ~~वह~~ परिमित समुच्चय ~~क~~ और निश्चित नहीं हो तो अपरिमित समुच्चय कहलाता है।

जैसे-  $A = \{a, e, i, o, u\}$  → परिमित  
 $B = \{1, 2, 3, \dots\}$  → अपरिमित

(4) समान समुच्चय: यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A में हो तो वे समान समुच्चय कहलाते हैं।

जैसे:  $A = \{a, e, i, o, u\}$   $\supseteq$   $B = \{e, i, o, u, a\}$   $\Rightarrow$   $A = B$

$$A = \{p, q, r\}$$

$$B = \{q, p, r\}$$

$$C = \{r, q, p\}$$

$$\text{अतः } A = B = C$$

(5) उपसमुच्चय: <sup>(super-set)</sup> यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A का भी अवयव है, तो समुच्चय B, ~~समुच्चय~~ समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है।  $B \subseteq A$  से निरूपित किया जाता है।  
 जैसे ~~समुच्चय~~  $B \subseteq A$

जैसे.  $A = \{3, 4, 5, 6\}$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

अतः  $B \subseteq A$ , B, A का एक उपसमुच्चय है।

(Q6) उचित उपसमुच्चय (proper subset) व अधिसमुच्चय (superset)

→ यदि A और B दो समुच्चय हैं तथा  $A \subset B$  एवं  $A \neq B$  तो A, B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है और B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है।

उदाहरण:-  $A = \{3, 4, 5\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

A, B का ~~उचित उपसमुच्चय~~ उचित उपसमुच्चय है।

B, A का अधिसमुच्चय है।

(Q7) सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set) :- जब विचाराधीन सभी समुच्चय

किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय होते हैं तो उस

समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय कहते हैं।

उदाहरण:- यदि  $A = \{1, 2, 4\}$

$B = \{2, 2, 4, 6\}$

$C = \{1, 2, 5, 6, 7\}$  तब

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

यहां U सार्वत्रिक ~~समुच्चय~~ समुच्चय है जिसे A, B व C उपसमुच्चय हैं।

(Q8) घात समुच्चय:- किसी समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं। A के घात समुच्चय को  $P(A)$  से निरूपित करते हैं।

→ घात समुच्चय कभी -भी रिक्त नहीं होता है।

यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  तो उपसमुच्चय  $P(A)$  की संख्या  $= 2^n$

यहां  $P(A) = \{ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$

## समुच्चयों पर संक्रिया :-

(1) संघ या सम्मिलन (Union) :- समुच्चय A तथा समुच्चय B का संघ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी अवयवों को सम्मिलित रूप से लेकर बनाया जाता है।

यदि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  तथा

$B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

तब  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$

→ A Union B पढ़ते हैं इसे।

(2) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection) :- समुच्चय A तथा समुच्चय B का सर्वनिष्ठ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी उभयनिष्ठ अवयव उपस्थित हैं।

यदि  $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$B = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

$A \cap B = \{6, 12, 18\}$

→ इसे A intersection B पढ़ते हैं।

(3) समुच्चयों का अन्तर :- समुच्चय A का समुच्चय B से अन्तर, उन अवयवों का समुच्चय है जो ~~समुच्चय~~ समुच्चय A में हैं किन्तु

समुच्चय B में नहीं।

यदि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A - B = \{1, 3, 5\}$

$B - A = \{8, 10\}$

(4) पूरक समुच्चय :- किसी समुच्चय का पूरक समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय के अवयवों में से उस समुच्चय के अवयवों को हटाने पर प्राप्त समुच्चय को कहते हैं।

यदि  $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

$A = \{2\}$

$A' = U - A = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

o समुच्चयों के बीजगणितीय नियम :-

(1) Idempotent Laws :- किसी भी समुच्चय A के लिए-

(i)  $A \cup A = A$

(ii)  $A \cap A = A$

(2) Identity Laws :- किसी भी समुच्चय A के लिए-

(i)  $A \cup \Phi = A$

(ii)  $A \cap U = A$

(3) Commutative Law :- किसी दो समुच्चयों A व B के लिए-

(i)  $A \cup B = B \cup A$

(ii)  $A \cap B = B \cap A$

(4) Associative Laws :- यदि A, B व C तीन समुच्चय हों-

(i)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(5) Distributive Law: यदि A, B व C तीन कोई समुच्चय हों तब

(i)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(6) De-Morgan's Law यदि A व B कोई दो समुच्चय हों तब

(i)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

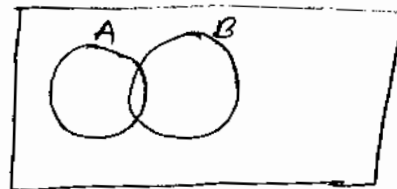
(ii)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Venn आरेख द्वारा समुच्चयों का प्रदर्शन: सार्वत्रिक समुच्चय को एक बड़े आयत से दर्शाते हैं तथा अन्य समुच्चयों को उस आयत के अन्दर वृत्तों से, तथा यदि दो समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ है तो उन द्वारा प्रदर्शित वृत्तों को, प्रतिच्छेदी वृत्तों से दर्शाते हैं।

उदा. यदि U सार्वत्रिक समुच्चय, A तथा B कोई दो समुच्चय हों, तो वेन आरेख द्वारा निम्न समुच्चय को प्रदर्शित कीजिए-

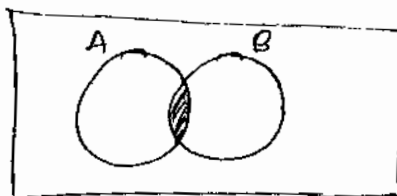
(i)  $(A \cup B)'$        ~~$(A \cap B)'$~~

सल: (i)  $(A \cup B)$



$(A \cup B)$

(ii)  $(A \cap B)$

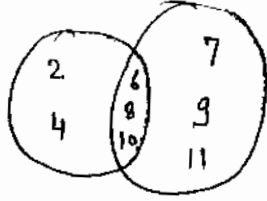


$(A \cap B)$

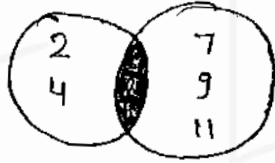
उदा० यदि  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  और  $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  हों तो  $A \cup B$  तथा  $A \cap B$  के Venn आरेख होंगे।

हल:

(i)  $A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$



(ii)  $A \cap B = \{6, 8, 10\}$



२२ का न्यूनतम मान  $\Rightarrow n(A) = 14$

२२ का अधिकतम मान  $\Rightarrow n(A) + n(B) = 14 + 6$

$\Rightarrow \boxed{14 \leq x \leq 20}$ 
 $= 20$

$$\max\{n(A), n(B)\} \leq n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$$

जब  $A \cap B = \phi$  तब  $n(A \cap B) = 0$

$\therefore \mu$  का न्यूनतम मान  $= 0$

$\mu$  का अधिकतम मान  $= 6$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq \mu \leq 6}$

सामान्य रूप से  $\Rightarrow$

$$0 \leq n(A \cap B) \leq \min\{n(A), n(B)\}$$

Q. 11.) Let given Set A व B हैं।

	A	B
अवस्था	$m$	$n$
उपसमूह	$2^m$	$2^n$

$\therefore 2^m - 2^n = 56$

Now by option  $\Rightarrow 2^6 - 2^3 = 56$

सम्बन्ध  $\Rightarrow$

Q.) यदि  $A = \{a, b, c\}$  व  $B = \{1, 2, 3\}$  हैं then बताइये निम्न में से कौन से A से B में सम्बन्ध हैं—

जैसे  $R_1 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}$

अथवा  $R_2 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$



- X (iii)  $R_3 = \{(a,b), (b,b), (c,b)\}$   $\therefore (b,b) \notin A \times B$   
 (iv)  $R_4 = A \times B$   
 (v)  $R_5 = \phi$

$\Rightarrow$  सम्बन्ध  $A \times B$ , समुच्चय  $A$  से  $B$  पर साक्षात्क सम्बन्ध  
 $\neq \phi$   $A$  से  $B$  पर रिक्त सम्बन्ध कहलाता है।

Q) यदि  $A = \{a, b, c\}$  व  $B = \{1, 2\}$  हैं then  $A$   
 से  $B$  पर परिभाषित सम्बन्धों की सं. = ?

Sol<sup>n</sup>  $\Rightarrow$

$$\therefore n(A \times B) = 3 \times 2 = 6$$

$\therefore A \times B$  का प्रत्येक उपसमुच्चय  $A$  से  $B$  में एक  
 सम्बन्ध होता है।  $\therefore$  6 अवयवों वाले समुच्चय  $A$   
 उपसमुच्चयों की सं.  $2^6$  होती है।  $\therefore A$  से  $B$  पर  
 परिभाषित सम्बन्धों की सं.  $2^6$  अर्थात् 64 होगी।

$\therefore A$  से  $B$  में परिभाषित अरिक्त सम्बन्धों की सं.  
 $2^6 - 1$  अर्थात् 63 होगी।

Q) सम्बन्ध  $R: N \rightarrow N$  में नियम  $xRy \Leftrightarrow x+y=10$   
 द्वारा परिभाषित है। सम्बन्ध  $R$  का क्रमित युग्मों  
 के समुच्चय क रूप में लिखो।

$\therefore$  given सम्बन्ध-

$$xRy \Leftrightarrow x+y=10$$

$$x=1 \text{ पर } \rightarrow y = \frac{9}{2} \notin N$$

$$x=2 \text{ पर } \rightarrow y = 4 \in N, 2R4$$

$$x=3 \text{ पर } \rightarrow y = \frac{7}{2} \notin N$$

$$x=4 \text{ पर } \rightarrow y = 3 \in N, 4R3$$

$$x=6 \text{ पर } \rightarrow y = 2 \in N, 6R2$$

$$x=8 \text{ पर } \rightarrow y = 1 \in N, 8R1$$

$$\therefore R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$$

सम्बन्ध के प्रान्त व परिसर  $\Rightarrow$

यदि  $R$ ,  $A$  व  $B$  में एक सम्बन्ध है,  
 then (i)  $R$  का प्रान्त =  $\{a : (a,b) \in R\}$   
 (ii)  $R$  का परिसर =  $\{b : (a,b) \in R\}$

Ex:-

given सम्बन्ध -

$$R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ में नियम } x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x + 2y = 10$$

$$\text{प्रान्त} = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\text{परिसर} = \therefore R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$$

$$\text{परिसर} = \{4, 3, 2, 1\}$$

Q.66 given  $R = \{(x,y) : x + 2y = 8\} \in \mathbb{N}$

$$x=1 \text{ पर } \Rightarrow y = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$x=2 \text{ पर } \Rightarrow y = 3 \in \mathbb{N}, \quad 2R3$$

$$x=4 \text{ पर } \Rightarrow y = 2 \in \mathbb{N}, \quad 4R2$$

$$x=6 \text{ पर } \Rightarrow y = 1 \in \mathbb{N}, \quad 6R1$$

$$R = \{(2,3), (4,2), (6,1)\}$$

$$\text{अतः प्रान्त} = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{परिसर} = \{3, 2, 1\}$$

प्रतिलोम सम्बन्ध  $\Rightarrow$  यदि  $R: A \rightarrow B$  में एक सम्बन्ध है  
 तब इसका प्रतिलोम सम्बन्ध

$R^{-1}: B \rightarrow A$  में निम्न प्रकार दिया जाता है-

$$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$$

$$\Rightarrow \boxed{R^{-1} \text{ का प्रान्त} = R \text{ का परिसर}}$$