Toppersnotes®

Unleash the topper in you

SBI P.O.

PROBATIONARY OFFICERS

PRELIMINARY & MAINS EXAMINATION

भाग - 2

संख्यात्मक अभियोग्यता एवं कंप्यूटर अध्ययन

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

विषयसूची

19 CHAPTER क्षेत्रमिति (Mensuration)

क्षेत्रमिती

2-D
- त्रिभुज
- चतुर्भुज
- वृत्त

3-D
- घनाभ
- घन
- बेलन
- शंकु
- छिन्नक
- गोला एवं अर्द्धगोला
- प्रिज्म
- पिरामिड

आधारभूत इकाइयों का परिवर्तन –

(1) लम्बाई

1 मीटर = 10 डेसीमीटर = 100 सेंटीमीटर = 1000 मिली मीटर

1 फीट = 12 इंच

1 इंच = 2.54 सेंटीमीटर

1 यार्ड = 3 फीट

1 कि.मी = 1000 मीटर = $\frac{5}{8}$ मील

1 मील = 1760 यार्ड = 5280 फीट

1 समुद्री मील = 6080 फीट

(2) क्षेत्रफल

1 वर्ग मीटर = 10000 सेमी.^{2}

1 वर्ग यार्ड = 9 फीट^2

1 एकड़ = 4047 मीटर^2

1 हेक्टेयर = 10000 मीटर^2

(3) द्रव्यमान

1 कि. ग्रा. = 1000 ग्राम

1 ग्राम = 10 मिली ग्राम

1 क्विंटल = 100 कि. ग्रा.

1 टन = 10 क्विंटल = 1000 कि. ग्रा.

(4) आयतन

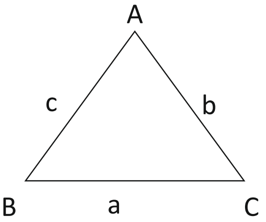
आयतन को घन इकाई में मापा जाता है।

1 लीटर = 1000 घन सेमी या 1000 सेमी.^{3}

1 मीटर^3 = 10000 लीटर

त्रिभुज

प्रश्नों के हल



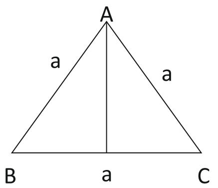
- ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ a, b व c है ।
- त्रिभुज का परिमाप = a + b + c
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = ½ × आधार × ऊँचाई
- जब तीनों भुजाएँ a, b, c दे रखी हो तब क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

  जहाँ s (अर्द्धपरिमाप) $= \frac{a+b+c}{2}$
- जब त्रिभुज की दो भुजाएँ व उनके बीच का कोण θ दिया हुआ हो तो

  क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ भुजाओं का गुणनफल $\times \sin\theta$

  सभी प्रकार के त्रिभुजो का एक–एक करके अध्ययन करते है।

(1) समबाहु त्रिभुज – ऐसा त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ समान हो।

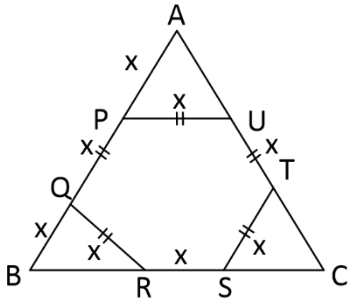


• परिमाप	= 3a
• माध्यिका या शीर्षलम्ब	$=\frac{\sqrt{3}}{2}a$
• समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
• समबाहु त्रिभुज के अंतः वृत्त की त्रिज्या	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$
• समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या	$\frac{a}{\sqrt{3}}$

- समबाहु त्रिभुज की भुजा ज्ञात करना जब इसके अंदर स्थित किसी बिंदु से तीनो भुजाओं पर लम्ब क्रमशः P_1, P_2 व P_3 डाले जाते है ।

  भुजा (a) = $\frac{2}{\sqrt{3}}\left[P_1 + P_2 + P_3\right]$

- किसी समबाहु त्रिभुज के अंतर्गत समषटभुज बनाया जाता हो तो



  यहाँ PQRSTU एक समषटभुज बनाया गया है।

  3x = AB

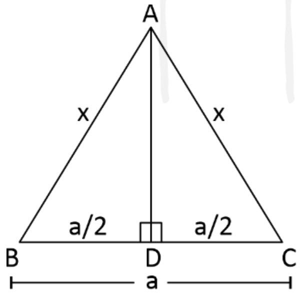
  $x = \frac{AB}{3}$

  समषटभुज की भुजा $= \frac{a}{3}$ {a, समबाहु त्रिभुज की भुजा}

  समषटभुज का क्षेत्रफल $= \frac{6\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 $= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

(2) समद्विबाहु त्रिभुज –

- जिस त्रिभुज में दो भुजाएँ समान होती है, उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते है।



  समान भुजा = x

  असमान भुजा = a

- असमान भुजा पर डाला गया लम्ब ही त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

  अतः $AD = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - a^2}$

  क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - a^2}$

  $= \frac{1}{4}a \times \sqrt{4x^2 - a^2}$

समकोण समद्विबाहु त्रिभुज

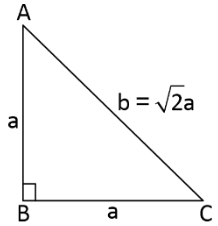
- एक कोण समकोण व दो भुजाए समान

  $\left[\begin{array}{l}\text{परिमाप} = 2a + \sqrt{2}a \\ \text{कर्ण (Hypotenuse)} = \sqrt{2}a\end{array}\right]$

  क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाई

  $= \frac{1}{2} \times a \times a$

  $= \frac{1}{2}a^2$

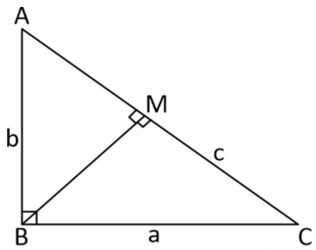


  कर्ण का माप दिये होने पर क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$(कर्ण)^2

  $= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}a\right)^2$

(3) समकोण त्रिभुज –

जिस त्रिभुज का एक कोण समकोण होता है। यहाँ B पर समकोण है। पाइथागोरस प्रमेय से, $c^2 = a^2 + b^2$



क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times a \times b$

कर्ण पर डाले गये लम्ब की लम्बाई (BM) = $\frac{\text{लम्ब} \times \text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{ba}{c}$

त्रिभुज से संबंधित अन्य प्रमुख तथ्य

- यदि किसी त्रिभुज की अंतः त्रिज्या तथा परिमाप दिया हुआ हो तब

  Δ का क्षेत्रफल (A) = r.s

  {जहाँ, s = अर्द्धपरिमाण, r = अंतःत्रिज्या}

- यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ या भुजाओं का गुणनफल व परिवृत्त की त्रिज्या (R) ज्ञात है तब त्रिभुज का क्षेत्रफल

  Δ का क्षेत्र $= \frac{abc}{4R}$

  {a, b, c $\rightarrow$ त्रिभुज की भुजाएँ, R $\rightarrow$ परिवृत्त की त्रिज्या}

- समकोण त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय को follow करने वाले

  त्रिक (Triplets)

3,	4,	5
6,	8,	10
5,	12,	13
7,	24,	25
20,	21,	29

चतुर्भुज

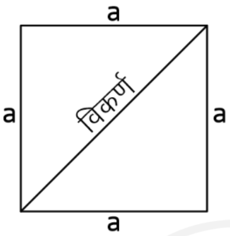
प्रश्नों के हल

चार भुजाओं से घिरी बन्द आकृति चतुर्भुज कहलाती है। इसके सभी कोणो का योग 360° व विकर्णों की संख्या 2 होती है।

सभी प्रकार के चतुर्भुजों को एक–एक करके अध्ययन करते हैं।

(1) वर्ग

- इसकी चारो भुजाएँ समान व प्रत्येक कोण 90° का होता है।



परिमाप (P) = 4 × भुजा = 4a

क्षेत्रफल (A) = (भुजा^{2}) = a^2

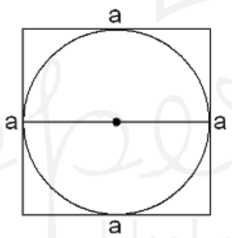
विकर्ण (d) = $\sqrt{2}$ a [वर्ग के दोनों विकर्ण बराबर होते हैं।]

(a) $A = a^2 = \frac{(\text{विकर्ण})^2}{2}$

(b) परिमाप $(P) = 4\sqrt{A}$

(c) $A = \frac{P^2}{16}$

- यदि किसी वर्ग के अंदर अधिकतम क्षेत्रफल का वृत्त बनाया जाता है



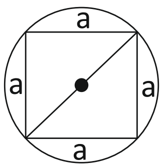
वृत्त का व्यास = वर्ग की भुजा

2r = a

त्रिज्या (r) = a/2

- यदि किसी वर्ग के बाहर वृत्त बनाया जाता है

वृत्त का व्यास = वर्ग का विकर्ण

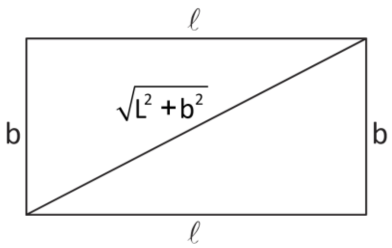


$2r = \sqrt{2}a$

$r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(2) आयत

इसकी आमने सामने की भुजाएँ समान व प्रत्येक कोण, समकोण (90°) का होता है।



परिमाप = 2(लम्बाई + चौडाई)

= $2(\ell + b)$

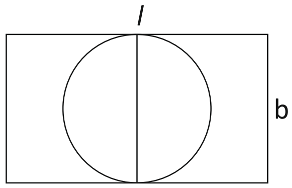
क्षेत्रफल = लम्बाई × चौडाई

= $\ell \times b$

विकर्ण = $\sqrt{\ell^2 + b^2}$ [आयत के दोनों विकर्ण बराबर होते है]

- यदि किसी आयत के अंतर्गत अधिकतम क्षेत्रफल का एक वृत्त बनाया जाता है।

वृत्त का व्यास = आयत की चौड़ाई

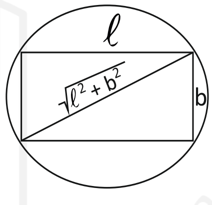


2r = b

r = b/2

- यदि किसी आयत के परिगत अधिकतम क्षेत्रफल का वृत्त बनाया जाता है।

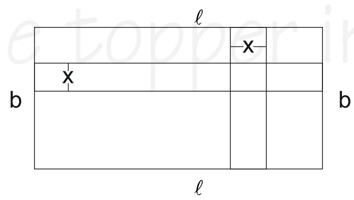
वृत्त का व्यास = आयत का विकर्ण



$2r = \sqrt{\ell^2 + b^2}$

$r = \frac{\sqrt{\ell^2 + b^2}}{2}$

- यदि किसी आयत के अंतर्गत भुजाओ के समानान्तर समान चौड़ाई का रास्ता बनाया जाता है।



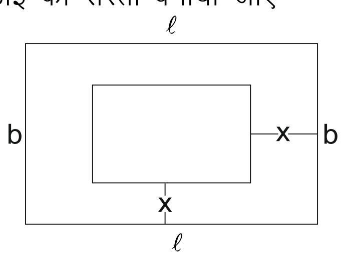
(i) यदि लम्बाई के समानान्तर बनाया गया रास्ते का क्षेत्रफल = ℓx

(ii) चौड़ाई के समानान्तर बनाया गया रास्ते का क्षेत्रफल = bx

रास्ते का क्षेत्रफल = $lx + bx - x^2$

= $x(l + b - x)$

- यदि किसी आयत के अंतर्गत भुजाओं के चारो ओर समान चौड़ाई का रास्ता बनाया जाए

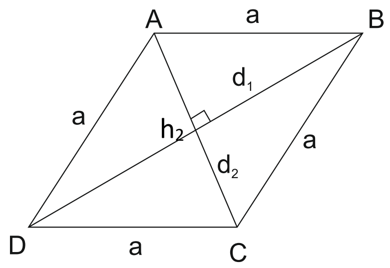


(i) रास्ते का क्षेत्रफल = बड़े आयत का क्षेत्रफल – छोटे आयत का क्षेत्रफल
$= \ell b - (\ell - 2x)(b - 2x)$
$= 2x(\ell + b - 2x)$

(ii) यदि रास्ता बाहर की ओर बनाया जाए तो रास्ते का क्षेत्रफल
$= 2x(\ell + b + 2x)$

(3) समचतुर्भुज

- ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारो भुजाएँ समान होती है, परन्तु प्रत्येक कोण 90° नहीं होता है। इसके विकर्ण, समकोण पर समद्विभाजित करते है।



परिमाप = 4a

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ विकर्णों का गुणनफल

समचतुर्भुज की भुजा

(a) = $\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

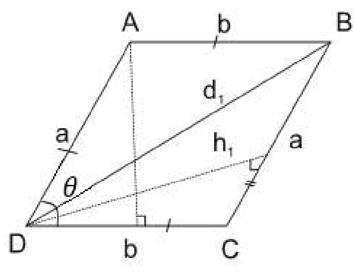
क्षेत्रफल – जब भुजाएँ दे रखी हो तथा कोण भी दे रखा हो तो –

क्षेत्रफल = भुजा × भुजा × sin θ

(4) समानान्तर चतुर्भुज

$\begin{bmatrix} AB \,||\, CD \text{ एवं } AB = CD \\ AD \,||\, BC \text{ एवं } AD = BC \end{bmatrix}$

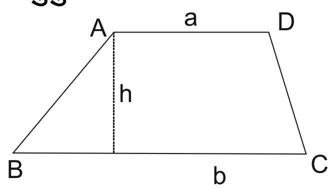
- आमने–सामने की भुजाएँ समान्तर एवं बराबर होती है
- परिमाप = 2 × (आसन्न भुजाओं का योग)
  = 2(a + b)



- क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
  = $a \times h_1$
  = $b \times h_2$
- क्षेत्रफल = ab sin θ
- विकर्ण $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$

$$\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)}$$

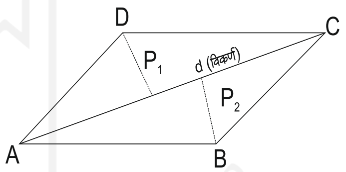
(5) समलम्ब चतुर्भुज



- इसमे विपरीत भुजाओ का एक जोड़ा समान्तर होता है।
  क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × (समान्तर भुजाओ का योग) × बीच की दूरी
  $= \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$

चतुर्भुज से संबंधित अन्य प्रमुख तथ्य

- चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ΔADC का क्षेत्रफल + ΔABC का क्षेत्रफल



$= \frac{1}{2} \times d \times P_1 + \frac{1}{2} \times d \times P_2$

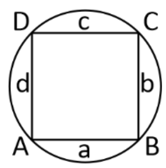
$= \frac{1}{2} d(P_1 + P_2)$

एक चक्रीय चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाओं के माप क्रमशः a, b, c और d है तब

क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

जहाँ s(अर्द्धपरिमाप) $= \frac{a+b+c+d}{2}$

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$



वृत्त

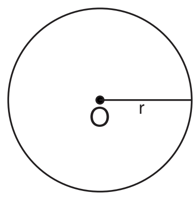
प्रश्नों के हल

वृत्त की त्रिज्या = r

वृत्त का व्यास = 2 × त्रिज्या = 2r

परिधि = $2\pi r$

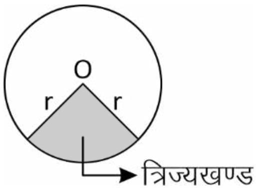
वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2



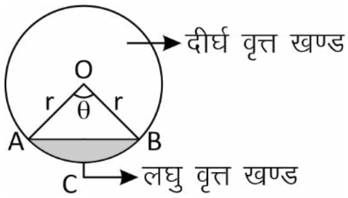
त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ}$

त्रिज्यखण्ड की परिधि = 2r + चाप की लंबाई

चाप की लंबाई = $2\pi r \frac{\theta}{360^\circ}$

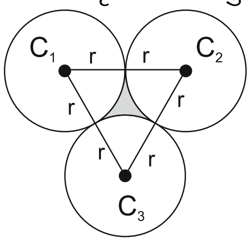


लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = त्रिज्य खण्ड ΔACB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल



$$= \boxed{\pi r^2 \frac{\theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta}$$

- तीन समान त्रिज्या के वृत्तों से घिरे हुये भाग का क्षेत्रफल



$\Delta C_1C_2C_3$ एक समबाहु त्रिभुज होगा चूँकि सभी वृत्त समान है व त्रिज्या r भी समान होगी।

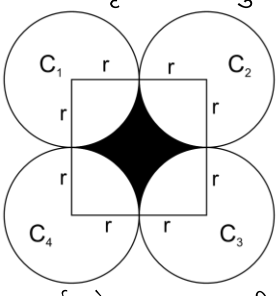
$\Delta C_1C_2C_3$ की भुजा = 2r

अतः घिरे हुये भाग का क्षेत्रफल = $\Delta C_1C_2C_3$ का क्षेत्रफल – तीन त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - 3 \times \frac{60}{360}\pi r^2 = \sqrt{3}r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) r^2 \Rightarrow 0.161 r^2$$

- चार समान त्रिज्या के वृत्तों से घिरे हुये भाग का क्षेत्रफल



$C_1C_2C_3C_4$ एक वर्ग होगा तथा इसकी प्रत्येक भुजा 2r होगी।

अतः भुजा = 2r

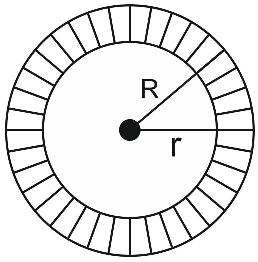
घिरे हुए भाग का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल – चार त्रिज्यखण्डों का क्षेत्रफल

$= (2r^2) - \pi r^2$ $\quad = 4r^2 - \pi r^2$

$= r^2 (4-\pi)$ $\quad = \frac{6}{7} r^2$

वलय (Ring)

दो संकेन्द्रीय वृत्तो के मध्य घिरे हुये भाग से जो आकृति बनती है उसे वलय (Ring) कहते है।



वलय का क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi(R^2 - r^2)$

वलय की परिधि = बाह्य परिधि + आंतरिक परिधि

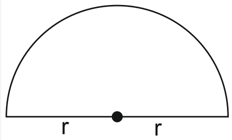
$= 2\pi R + 2\pi r$

$= 2\pi(R + r)$

अर्द्धवृत्त

अर्द्धवृत्त का परिमाप $= \pi r + 2r = r(\pi+2)$

क्षेत्रफल $= \pi r^2 / 2$



- जब किसी अर्द्धवृत्त के अंदर दो अर्द्धवृत्त व एक वृत्त नीचे दिये गये चित्रानुसार बने हो तब –

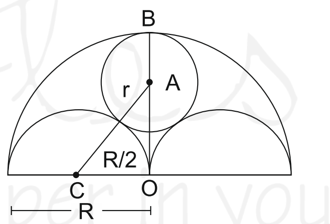
AB = r

AO = R – r

OC = R/2

ΔAOC में

$AC^2 = OA^2 + OC^2$

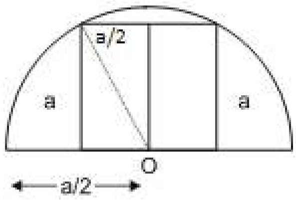


$$\left(r + \frac{R}{2}\right)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$R^2 = 3Rr$

$$r = \frac{R}{3}$$

- किसी अर्द्धवृत्त के अंदर अधिकतम क्षेत्रफल का वर्ग बनाया जाए तो



$$\boxed{r = \frac{\sqrt{5}a}{2}}$$

क्षेत्रफल तथा परिमिति से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण तथ्य

प्रश्नों के हल

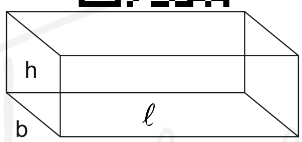
(1) यदि किसी समबाहु त्रिभुज की परिमिति, वर्ग की परिमिति एवं वृत्त की परिधि समान हो तो वृत्त का क्षेत्रफल सबसे अधिक होगा।
वृत्त का क्षेत्रफल > वर्ग का क्षेत्रफल > समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

(2) जब इनके क्षेत्रफल समान हो तब
समबाहु त्रिभुज की परिमिती > वर्ग की परिमिति > वृत्त की परिधि

(3) यदि किसी त्रिभुज या चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा, वृत्त की त्रिज्या / व्यास या परिधि को n गुणा कर दिया जाए तो क्षेत्रफल n^2 गुणा हो जाएगा
क्षेत्रफल में प्रतिशत परिवर्तन = $(n^2 - 1) \times 100$

घनाभ

सिद्धांत

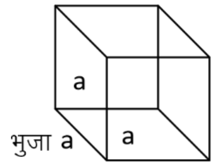


- यह आकृति आयताकार रूप में होती है।
  ℓ = लंबाई, b = चौड़ाई, h = ऊँचाई
  संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(\ell b + bh + \ell h)$
  विकर्ण (d) $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$
  आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
  $= \ell bh$
- इसमें 6 पृष्ठ होते है व विपरीत पृष्ठ के जोड़े समान होते है।
- भुजाओं की संख्या = 12
- शीर्षो की संख्या = 8
- कमरे की चारो दीवारों का क्षेत्रफल = आधार की परिमिति × ऊँचाई
  $= \boxed{2(\ell + b) \times h}$
- यदि किसी डिब्बे या बक्से की क्षमता निकालनी हो तो
  क्षमता = आंतरिक आयतन
  $(\ell - 2x)(b - 2x)(h - 2x)$
  जहाँ x = दीवार की मोटाई
- यदि डिब्बा खुला हुआ हो तो
  क्षमता = $(\ell - 2x)(b - 2x)(h - 2x)$
  धातु का आयतन = बाह्य आयतन – आंतरिक आयतन

घन

सिद्धांत

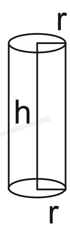
- यह वर्गाकार रूप में होता है, प्रत्येक सतह एक वर्ग होती है।



- कुल पृष्ठ / सतह → 6
- भुजाएँ → 12
- शीर्ष → 8
- घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$
- विकर्ण $= \sqrt{3}a$
- आयतन = (भुजा)^3 = a^3

बेलन

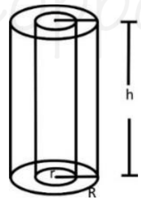
सिद्धांत



- बेलन की त्रिज्या r व ऊँचाई h हो तो बेलन के वक्र / पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल
  $= 2\pi rh$
- संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2$
  $= 2\pi r(h + r)$
- बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

खोखला बेलन

- यह एक पाइप की तरह होता है ।
  जिसकी ऊँचाई h व अंतः व बाह्य त्रिज्याएँ क्रमशः r व R हो तो –

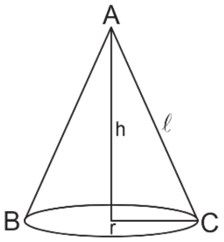


- खोखले बेलन का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल = बाह्य पार्श्व पृष्ठ + आंतरिक पार्श्व पृष्ठ
  $= 2\pi Rh + 2\pi rH$
  $= 2\pi h (R+r)$
- खोखले बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + वृत्ताकार भाग का क्षेत्रफल
  $= 2\pi h (R+r) + 2\pi (R^2 - r^2)$
- खोखले बेलन का आयतन = खोखले बेलन को बनाने में लगे पदार्थ का आयतन
  $= \pi R^2 h - \pi r^2 h$
  $= \pi (R^2 - r^2) h$

शंकु

सिद्धांत

यहाँ



- h = शंकु की ऊँचाई
- ℓ = तिर्यक ऊँचाई
- r = त्रिज्या

$\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r \ell$

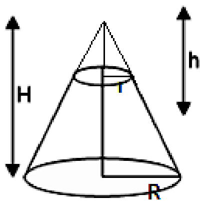
संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = $\pi r \ell + \pi r^2$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

छिन्नक (Frustum)

- Bucket, Glass, Pisten आदि की आकृति छिन्नक के समान होती है।
- तिर्यक ऊँचाई $\ell = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$
- वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi(R+r)\ell$
- संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + दोनों सिरो के वृत्तों का क्षेत्रफल

  $= \pi(R+r)\ell + \pi R^2 + \pi r^2$
- आयतन $= \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)h$
- मूल शंकु की ऊँचाई $= \frac{Rh}{R-r}$
- छिन्नक, शंकु को शीर्ष से किसी ऊँचाई के अनुसार काट कर बनाया जाता है।

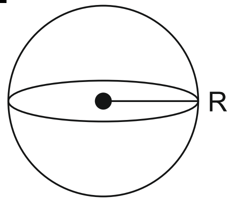


- किसी शंकु को शीर्ष से ऊँचाई के अनुसार काटा जाता हो तो

$$\frac{\text{बडे शंकु का आयतन}}{\text{छोटे शंकु का आयतन}} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left(\frac{H}{h}\right)^3$$

गोला

सिद्धांत



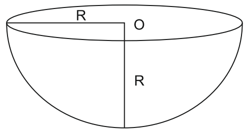
वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $4\pi R^2$

आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

खोखले गोले का आयतन =

$\frac{4}{3}\pi(R-x)^3$ {x - मोटाई}

अर्द्धगोला



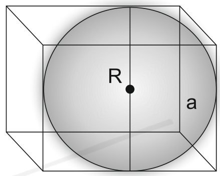
वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi R^2$

संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $3\pi R^2$

आयतन = $\frac{2}{3}\pi R^3$

मिश्रित आकृतियों पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण नतीजे

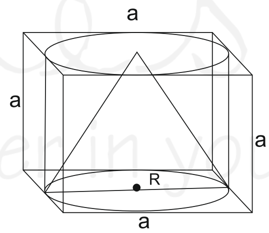
(1) किसी घन के अंतर्गत अधिकतम आयतन का एक गोला रखा जाए गोले का व्यास = घन की भुजा



2R = a

$R = \frac{a}{2}$

(2) किसी घन के अंतर्गत अधिकतम आयतन का बेलन या शंकु रखा जाए–



बेलन या शंकुल के आधार की त्रिज्या $R = \frac{a}{2}$

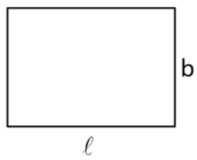
बेलन या शंकु की ऊँचाई = a

$$\frac{\text{घन का आयतन}}{\text{बेलन का आयतन}} = \frac{a^3}{\pi R^2 h}$$

$$\frac{a^3}{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a} = \frac{a^3 \times 4}{\pi a^3} = \frac{4}{\pi} = \boxed{4:\pi}$$

(3) किसी आयताकार धातु की चादर को मोड़कर बेलन बनाया जाता हो तब –

- यदि लंबाई के अनुदिश मोड़ा जाए – परिधि = चौड़ाई



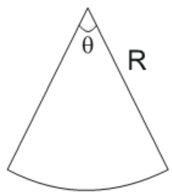
$2\pi r = b$

$r = \frac{b}{2\pi}$

ℓ = लंबाई ऊँचाई = ℓ

- यदि चौड़ाई के अनुदिश मोड़ा जाए
  $2\pi r = \ell$
  $r = \frac{\ell}{2\pi}$
  ऊँचाई = b

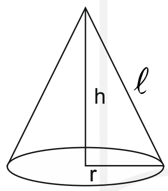
(4) यदि किसी त्रिज्यखंड को मोड़कर एक शंकु बनाया जाता हो –
तिर्यक ऊँचाई (ℓ) = R
त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल



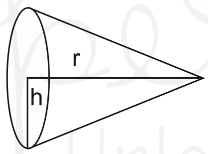
$\pi R^2 \frac{\theta}{360°} = \pi r \ell$
{r = शंकु की त्रिज्या}
$\pi R^2 \frac{\theta}{360°} = \pi r R$

$$\boxed{r = \frac{\theta}{360} \times R}$$

(5) यदि किसी समकोण त्रिभुज को घुमाकर शंकु बनाया जाता हो –

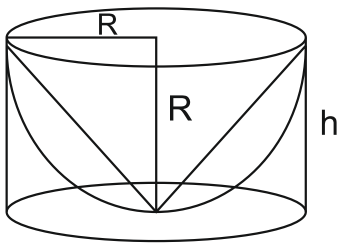


- यदि लंब के चारो ओर घुमाकर शंकु बनाया जाए
  r = आधार की त्रिज्या
  h = लंब (ऊँचाई)
- यदि आधार के चारो ओर घुमाया जाए –
  r = लंब (ऊँचाई)
  h = आधार की त्रिज्या



(6) यदि कर्ण के चारो ओर घुमाया जाए –
$$r = \frac{\text{आधार} \times \text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$
इस प्रकार बनी आकृति का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 \times$ कर्ण

(7) एक ही आधार एवं एक ही ऊँचाई का अर्द्धगोला, बेलन एवं शंकु लिया जाता हो :–



अर्द्धगोला का आयतन : बेलन का आयतन : शंकु का आयतन

$\frac{2}{3}\pi R^3 : \pi R^2 h : \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$\frac{2}{3}\pi R^3 : \pi R^2 \times R : \frac{1}{3}\pi R^2 \times R$

$\frac{2}{3} : 1 : \frac{1}{3} = 2 : 3 : 1$

वक्रपृष्ठ के क्षेत्रफलों का अनुपात $= 2 : 2 : \sqrt{2}$

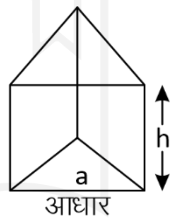
संपूर्ण पृष्ठ के क्षेत्रफलों का अनुपात $= 3 : 4 : \sqrt{2} + 1$

प्रिज्म

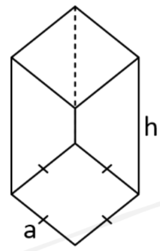
सिद्धांत

- प्रिज्म के आधार के अनुसार यह भिन्न–भिन्न प्रकार का हो सकता है।

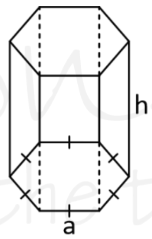
(1) समबाहु त्रिभुजाकार



(2) वर्गाकार प्रिज्म



(3) षट्कोणीय प्रिज्म

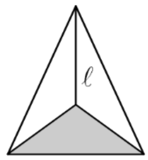


- पार्श्व सतह का क्षेत्रफल = आधार की परिमिति × ऊँचाई
- प्रिज्म का कुल क्षेत्रफल = पार्श्व तल का क्षेत्रफल + 2 (आधार का क्षेत्रफल)
- आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
- प्रिज्म का आधार जो भी होगा उसी के अनुरूप उसकी परिमिति व क्षेत्रफल ज्ञात कर लेंगे।

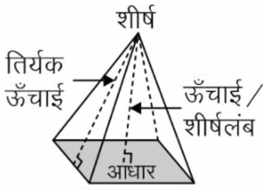
पिरामिड

सिद्धांत

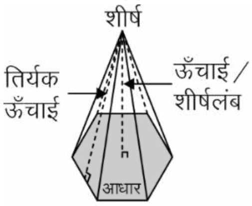
आयतन = $\frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई



(1) त्रिभुज आधार पिरामिड



(2) वर्ग–आधार पिरामिड



(3) षट्कोणीय पिरामिड

पार्श्व तल का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ आधार का परिमिति $\times$ तिर्यक ऊँचाई

संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = पार्श्व तल का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (आधार की परिमिति) $\times$ तिर्यक ऊँचाई + (आधार का क्षेत्रफल)

(i) जब आधार वर्गाकार हो तब

तिर्यक ऊँचाई $= \ell = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$ {a वर्ग की भुजा}

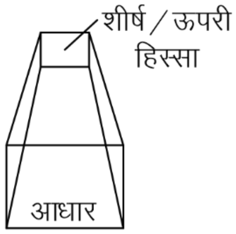
(ii) जब आधार समषष्ट भुजा कार हो तब

तिर्यक ऊँचाई $\ell = \sqrt{a^2 + h^2}$

{a, समषटभुज की भुजा है}

पिरामिड का छिन्नक :– जब किसी पिरामिड के शीर्ष भाग को उसके आधार के समान्तर समतल द्वारा काट दिया जाता है, तो शेष बची हुई आकृति को पिरामिड का छिन्नक कहते हैं।

- यदि A_1 व A_2 ऊपरी व आधार के पृष्ठ हो, P_1 व P_2 ऊपरी व निचले पृष्ठ की परिमाप हो, h ऊँचाई व ℓ तिर्यक ऊँचाई हो तब इस पिरामिड के छिन्नक के लिए –



पिरामिड का छिन्नक

वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\ell$

कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल + A_1 + A_2

$= \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\ell + A_1 + A_2$

आयतन $= \frac{1}{3}h\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1, A_2}\right)$

अभ्यास प्रश्न

त्रिभुजों के परिमाप एवं क्षेत्रफल पर आधारित

विषम बाहु त्रिभुज

प्रश्नों के हल

उदा.1 8 सेमी, 6 सेमी और 4 सेमी भुजाओं वाले एक विषमबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उदा.2 रॉबर्ट को त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके बीच का संगत कोण क्रमशः 14 इकाई, 28 इकाई और 30 डिग्री दिया गया था। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

समबाहु त्रिभुज

प्रश्नों के हल

उदा.1 किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा 6cm हैं। क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) $9\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (b) $6\sqrt{3}$ वर्ग सेमी
(c) $4\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (d) $8\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

उदा.2 एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $400\sqrt{3}$ वर्ग मीटर है, उसका (त्रिभुज) परिमाप हैं?

(a) 120 m (b) 150 m
(c) 90 m (d) 135 m

उदा.3 यदि किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा को 2 इकाई से बढ़ा दिया जाये, तब क्षेत्रफल $3+\sqrt{3}$ इकाई^2 बढ़ जाता हैं। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा ज्ञात करें ?

(a) $\sqrt{3}$ इकाई (b) 3 इकाई
(c) $3\sqrt{3}$ इकाई (d) $3\sqrt{2}$ इकाई

समद्विबाहु त्रिभुज

प्रश्नों के हल

उदा.1 किसी समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाएँ 15 सेमी. तथा 22 सेमी. हैं। परिमाप के सम्भव मान ज्ञात करें ?

(a) 52 or 59 (b) 52 or 60
(c) 15 or 37 (d) 37 or 29

उदा.2 किसी समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई हैं। यदि असमान भुजा की लम्बाई 2 इकाई हो, तब बराबर भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करें ?

(a) 4 इकाई (b) $2\sqrt{3}$ इकाई

(c) $\sqrt{17}$ इकाई (d) $3\sqrt{2}$ इकाई

उदा.3 किसी समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 544cm तथा प्रत्येक बराबर भुजा आधार का 5/6 हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें?

(a) 38172 (b) 18372

(c) 31872 (d) 13872

समकोण त्रिभुज

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक समकोण त्रिभुज का आधार और ऊँचाई क्रमशः 12 सेमी और 5 सेमी है। सम्मुख शीर्ष से इसके कर्ण की लम्बवत दूरी है

(a) $4\frac{4}{13}$ cm (b) $4\frac{8}{13}$ cm

(c) 5 cm (d) 7 cm

हल (b)

उदा.2 किसी समकोण त्रिभुज का एक कोण, दूसरे कोण का दो गुना हैं। यदि विकर्ण की लम्बाई 10 सेमी. हो, तब क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) $\frac{25}{2}\sqrt{3}$ सेमी² (b) 25 सेमी²

(c) $25\sqrt{3}$ सेमी² (d) $\frac{75}{2}$ सेमी²

चतुर्भुजों के परिमाप तथा क्षेत्रफल पर आधारित

वर्ग से सम्बंधित प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किसी वर्ग के विकर्ण की लंबाई $6\sqrt{2}$ सेमी. है, तो इसका क्षेत्रफल कितना होगा ?

(a) $24\sqrt{2}$ सेमी^{2} (b) 24 सेमी^{2}

(c) 36 सेमी^{2} (d) 72 सेमी^{2}

उदा.2 किसी वर्ग तथा वृत्त का परिमाप समान हैं। यदि वृत्त का क्षेत्रफल 3850 मीटर² हो, तब वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) 4225 (b) 3025

(c) 2500 (d) 2025

हल (b)

उदा.3 पाँच वर्ग के परिमाप 24cm, 32cm, 40 cm, 76 cm तथा 80cm हैं। उस वर्ग का परिमाप ज्ञात करें, जिसका क्षेत्रफल उपर्युक्त वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर हों ?

(a) 31 सेमी (b) 62 सेमी

(c) 124 सेमी (d) 961 सेमी

हल (c)

आयत से संबंधित प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक आयत की लम्बाई और चौड़ाई में 23 मी. का अन्तर हैं, यदि आयत का परिमाप 206 मी. हो तो क्षेत्रफल क्या हैं।

(a) 1520 मी^{2} (b) 2420 मी^{2}

(c) 2480 मी^{2} (d) 2520 मी^{2}

हल (d)

उदा.2 200 m x 180m वाले आयताकार क्षेत्र के चारों ओर 10m चौड़ा रास्ता हैं। रास्ते के क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) 8000 (b) 7000

(c) 7500 (d) 8200

हल (a)

उदा.3 एक आयत की लम्बाई 20 सेमी. और क्षेत्रफल 200 वर्ग सेमी. है। तदनुसार, यदि उसकी केवल लम्बाई बढाकर उसके मूल क्षेत्रफल में $1\frac{1}{5}$ गुनी वृद्धि कर दी जाए, तो इस प्रकार निर्मित आयत का परिमाप कितने सेमी. हो जाएगा ?

(a) 72 (b) 60

(c) 64 (d) 68

हल (d)

समचतुर्भुज से सम्बंधित प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक समचर्तुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 32 सेमी. तथा 24 सेमी. हैं। तो समचर्तुभुज का परिमाप हैं।

(a) 80 cm (b) 72 cm

(c) 68 cm (d) 64 cm

हल (a)

उदा.2 एक समचतुर्भुज का परिमाप 40 सेमी. हैं। यदि दोनों विकर्णों में से एक की लम्बाई 12 सेमी. है, तो दूसरे विकर्ण की लम्बाई क्या हैं ?

(a) 12 cm (b) $\sqrt{136}$ cm

(c) 16 cm (d) $\sqrt{44}$ cm

उदा.3 एक समचतुर्भुज का विकर्ण क्रमशः 8 मीटर और 6 मीटर हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

(a) 48 वर्ग मीटर (b) 24 वर्ग मीटर
(c) 12 वर्ग मीटर (d) 96 वर्ग मीटर

हल (b)

समान्तर चतुर्भुज से सम्बंधित प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक समान्तर चतुर्भुज की भुजाएँ 60 मीटर और 40 मीटर हैं। उसका एक विकर्ण 80 मीटर लम्बा हैं। उसका क्षेत्रफल हैं

(a) $500\sqrt{15}$ मीटर^2
(b) $600\sqrt{15}$ मीटर^2
(c) $400\sqrt{15}$ मीटर^2
(d) $450\sqrt{15}$ मीटर^2

हल (b)

उदा.2 यदि समांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ 4 : 5 के अनुपात में है जिनका परिमाप 180 सेमी. है, तो इसकी भुजाएँ हैं :

(a) 40 सेमी. और 50 सेमी.
(b) 32 सेमी. और 40 सेमी.
(c) 44 सेमी. और 55 सेमी.
(d) 36 सेमी. और 45 सेमी.

हल (a)

उदा.3 ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है तथा विकर्ण AC, BD एक–दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। यदि, E,F,G तथा H, AO, DO, CO तथा BO के मध्य बिन्दु हैं। चतुर्भुज EFGH के परिमाप तथा समानान्तर चतुर्भुज ABCD के परिमाप का अनुपात ज्ञात करें ?

(a) 1 : 4 (b) 2 : 3
(c) 1 : 2 (d) 1 : 3

हल (c)

समलम्ब चतुर्भुज से सम्बंधित प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB समान्तर हैं CD के और AB = 2CD के तथा इसके विकर्ण O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि AOB का क्षेत्रफल 84 cm^2 है, तो COD का क्षेत्रफल बराबर है

(a) 72 cm^2 (b) 21 cm^2
(c) 42 cm^2 (d) 26 cm^2

उदा.2 एक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 176 है और इसकी ऊंचाई इसकी समानांतर भुजाओं के योग का 2/11 वां है। यदि समांतर भुजाओं की लंबाई का अनुपात 4:7 है, तो एक विकर्ण की लंबाई (सेमी में) है–

(a) 28 (b) $\sqrt{137}$
(c) $2\sqrt{137}$ (d) 24

हल (c)

वृत्त के परिधि एवं क्षेत्रफल पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 28 सेमी. भुजा वाले वर्ग के अन्दर खींचे गये बड़े से बड़े वृत्त का क्षेत्रफल सेमी.^{2} में ज्ञात करें ?

(a) 17248 (b) 784
(c) 8624 (d) 616

हल (d)

उदा.2 50 सेमी व्यास का एक दांतेदार पहिया 30 सेमी व्यास के छोटे पहिये से जुड़ा हुआ है। यदि बड़ा पहिया 15 चक्कर लगाता है तो छोटा पहिया कितने चक्कर लगाएगा ?

(a) 18 (b) 20
(c) 25 (d) 30

अर्द्ध वृत्त के परिमाप तथा क्षेत्रफल आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक अर्ध–गोलाकार आकार की खिड़की का व्यास 63 सेमी है। इसका परिमाप बराबर होता है

(a) 126 cm (b) 162 cm
(c) 198 cm (d) 251 cm

हल (b)

उदा.2 यदि एक तार को एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है, तो वर्ग का क्षेत्रफल 81 वर्ग सेमी है। जब तार को अर्धवृत्ताकार आकार में मोड़ा जाता है, तो अर्धवृत्त का क्षेत्रफल होगा

(a) 22 cm^2 (b) 44 cm^2
(c) 77 cm^2 (d) 154 cm^2

हल (c)

वलय / रिंग पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 दो संकेन्द्रीय वृत्तों, जिनकी परिधि 88 सेमी. तथा 132 सेमी. हैं, के द्वारा अंतरित रिंग का क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) 75 सेमी^{2} (b) 770 सेमी^{2}

(c) 715 सेमी^{2} (d) 660 सेमी^{2}

हल (b)

उदा.2 किसी वृत्ताकार पार्क के चारों ओर एक समान चौडाई का रास्ता बना हुआ हैं। इस वृत्ताकार पथ की आंतरिक और बाहरी परिधियों का अन्तर 132 मीटर हैं। पथ की चौड़ाई हैं ? $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$

(a) 22 मी (b) 20 मी

(c) 21 मी (d) 24 मी

हल (c)

सम्मिलित आकृति के क्षेत्रफल आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 किसी वर्ग के भीतर खींचे गये वृत्त का क्षेत्रफल 9π सेमी^{2} हैं। वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) 24 सेमी^{2} (b) 30 सेमी^{2}

(c) 36 सेमी^{2} (d) 81 सेमी^{2}

हल (c)

उदा.2 किसी वर्ग का विकर्ण $12\sqrt{2}$ cm है जिसके अन्दर एक वृत्त स्थित हैं। इस वृत्त के अन्दर एक समबाहु त्रिभुज स्थित हैं। त्रिभुज की भुजा ज्ञात करें ?

(a) $4\sqrt{3}$ cm (b) $8\sqrt{3}$ cm

(c) $6\sqrt{3}$ cm (d) $11\sqrt{3}$ cm

हल (c)

उदा.3 एक वृत्त की परिधि 100 सेमी. हैं। तो वृत्त के अन्दर बने वर्ग की भुजा क्या हैं ?

(a) $\frac{100\sqrt{2}}{\pi}$ cm (b) $\frac{50\sqrt{2}}{\pi}$ cm

(c) $\frac{100}{\pi}$ cm (d) $50\sqrt{2}$ cm

हल (b)

छायांकित भाग का क्षेत्रफल आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 किसी वर्ग के कोनों पर बने 4 सेमी. त्रिज्या वाले चार वृत्त एक–दूसरे को स्पर्श करते हैं। वर्ग तथा वृत्तों के बीच रिक्त स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) $9(\pi - 4)$ सेमी^{2} (b) $16(4 - \pi)$ सेमी^{2}

(c) $99(\pi - 4)$ सेमी^{2} (d) $169(\pi - 4)$ सेमी^{2}

हल (b)

उदा.2 दिए गए चित्र में OED और OBA एक वृत्त के त्रिज्यखंड़ हैं जिनका केंद्र O हैं, तो रंगे हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें ?

(a) $\frac{11}{16}$ m^2 (b) $\frac{11}{8}$ m^2

(c) $\frac{11}{2}$ m^2 (d) $\frac{11}{4}$ m^2

हल (d)

क्षेत्रमिति 3D

घनाभ

क्षेत्रफल तथा आयतन आधारित सामान्य प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 4000 की आबादी वाले एक कस्बे में प्रति व्यक्ति 140 लीटर पानी की आवश्यकता होती है। इसमें 18m × 12m × 8m का एक टैंक है। इस टंकी का पानी _____ दिनों के लिए पर्याप्त होगा ?

(a) 3 (b) 4

(c) 5 (d) 2

हल (a)

उदा.2 एक घनाभ आकृति की पानी की टंकी में 216 लीटर पानी है। इसकी गहराई इसकी लंबाई का 1/3 है और चौड़ाई, लंबाई और चौड़ाई के अंतर के 1/3 का 1/2 है। टैंक की लंबाई है –

(a) 72 dm (b) 18 dm

(c) 6 dm (d) 2 dm

हल (b)