



SBI

CLERK

PRELIMINARY & MAINS EXAMINATION

भाग - 2

संख्यात्मक अभियोग्यता एवं कंप्यूटर अध्ययन



विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
1	सरलीकरण	1
2	संख्या पद्धति	5
3	लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक	12
4	करणी व घातांक	15
5	अनुपात व समानुपात	19
6	प्रतिशतता	23
7	लाभ – हानि	27
8	बट्टा	32
9	औसत	35
10	मिश्रण एवं एलीगेशन	39
11	समय और कार्य	41
12	पाइप और टंकी	44
13	चाल, समय और दूरी	47
14	नाव और धारा	51
15	साधारण ब्याज	53
16	चक्रवृद्धि ब्याज	56
17	आयु (Age Problems)	59
18	साझेदारी (Partnership)	61
19	क्षेत्रमिति	63
20	रेखीय समीकरण	78
21	डेटा इंटरप्रिटेशन	80
22	प्रायिकता	91
23	कंप्यूटर का परिचय	98

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
24	कंप्यूटर की कार्य प्रणाली, इनपुट, आउटपुट एवं भण्डारण	101
25	कंप्यूटर प्रणाली बाइनरी, डेसीमल आस्की कोड व यूनिकोड	105
26	कंप्यूटर का संगठन	108
27	कंप्यूटर की भाषाएँ	111
28	कंप्यूटर सॉफ्टवेर	113
29	ऑपरेटिंग सिस्टम	114
30	मैक्रोसोफ्ट, विंडोज, उसके विभिन्न वर्जन व उसके मुलभुत अवयक	115
31	वर्ड प्रोसेसिंग सॉफ्टवेर	116
32	माइक्रोसॉफ्ट पॉवर पॉइंट	118
33	माइक्रोसॉफ्ट एक्सेल स्प्रेडशीट सॉफ्टवेर	120
34	इन्टरनेट	126
35	कंप्यूटर नेटवर्किंग	129
36	नेटवर्क टोपोलॉजी	131
37	वेबसाइट	133
38	डेटाबेस	135
39	सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी	140
40	सोशल नेटवर्किंग साईट	152
41	कंप्यूटर संक्षिप्ताक्षर (Abbreviations)	155

4 CHAPTER

करणी व घातांक (Surds and Indices)



करणी

वे राशियाँ जिनका मूल मान ठीक-ठीक नहीं निकाला जा सके, उसे करणी कहते हैं।

- यदि a एक परिमेय संख्या है तथा m एक धन पूर्णांक है, तो a का m वाँ मूल



या $a^{\frac{1}{m}}$ या $\sqrt[m]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होगी, यहाँ पर $\sqrt[m]{a}$ एक करणी है।

जैसे - $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादि।

- करणी के अनेक रूप हैं जैसे - $\sqrt[3]{\cdot}, \sqrt[4]{\cdot}, \sqrt[5]{\cdot} \dots$

- $a^{\frac{1}{m}}$ को m वाँ घात युक्त करणी कहा जाता है।

करणियों के प्रकार

शुद्ध करणी	मिश्र करणी	सजातीय करणी	संयुगमी करणी
वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड हो तो ऐसी करणी को शुद्ध करणी कहते हैं।	वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड के अलावा कोई भी एक परिमेय संख्या मौजूद हो। जैसे :- $4\sqrt{5}, 3\sqrt{8}, 2\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी करणिया जिसमें उनके अपरिमेय गुणनखण्ड एक समान हो। जैसे :- $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी दो पद वाली दो करणिया जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त विन्ह असमान होते हैं। जैसे :- $(2+\sqrt{8})$ व $(2-\sqrt{8}), (2+\sqrt{5})$ व $(2-\sqrt{5})$

जब पूरी राशि करणीगत हो

- यदि करणी में लिखी संख्या के दो क्रमागत गुणनखण्ड न हो सके तो पूरी राशि को x के बराबर मानकर दोनों पक्षों का वर्ग करके द्विघात समीकरण रूप ($ax^2 + bx + c = 0$) में बदलेंगे।

- तब श्री धराचार्य सूत्र से

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

करणियों में संक्रियाएँ

- करणी का योग व अंतर

केवल सजातीय करणियों को ही आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है।

उदा. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

$$\text{हल } \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3}$$

$$= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$= 9\sqrt{3}$$

उदा. $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

$$\text{हल } \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3}$$

$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

- करणी का गुणा-भाग

करणियों का गुणा भाग तभी संभव है जब उनकी घातें समान हो।

उदा. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{4}$

$$\text{हल } \sqrt[3]{2 \times 5 \times 4}$$

$$= \sqrt[3]{40}$$

उदा. $12 \times 4^{\frac{1}{3}}$ में $3\sqrt{2}$ से भाग दो।

$$\text{हल } \frac{12 \times 4^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2}} = \frac{4 \times 4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{4 \times 4^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{6}}}$$

$$= 4 \times \left[\frac{4^2}{2^3} \right]^{\frac{1}{6}} = 4 \times \left[\frac{16}{8} \right]^{\frac{1}{6}}$$

$$= 4 \times 2^{\frac{1}{6}}$$

करणियों के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

$$(1) \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

$$(2) \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$(3) \sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

$$(4) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$(5) (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$(6) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

$$(7) \sqrt{2} = 1.41421$$

$$(8) \sqrt{3} = 1.73205$$

$$(9) \sqrt{5} = 2.23607$$

$$(10) \sqrt{6} = 2.44949$$

संयुग्मी

- ऐसी दो पद वाली करणी जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते हैं तो ऐसी करणियों को संयुग्मी करणी कहते हैं।
- इस प्रकार की राशियों का मान ज्ञात करने के लिए हर की संयुग्मी से अंश व हर दोनों से गुणा करते हैं।

उदा. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल } & \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} \\ &= \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} \\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} \\ &= 2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

करणियों की तुलना (बड़ा या छोटा)

- दिये गये करणियों में से सबसे बड़ा या छोटा निकालने के लिए हम घातांक को समान करते हैं तथा आधार की तुलना करते हैं।

उदा. $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

हल $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ की घातें 3, 2, 3 हैं जिनका LCM = 6 हैं।

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64}$$

$$\sqrt[3]{6^2} = \sqrt[6]{36}$$

$$\text{अतः सबसे बड़ी संख्या} = \sqrt[6]{64} = \sqrt{4}$$

घातांक – किसी संख्या को उसी से जितनी बार गुणा करते हैं उतने को उस संख्या की घात कहते हैं और उस संख्या को आधार कहते हैं।

घातांक के कुछ महत्वपूर्ण नियम

$$(i) a^m = a \times a \times a \times \dots \dots m \text{ बार}$$

$$(ii) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(iii) a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

$$(iv) a^m \div a^n = a^{(m-n)}$$

$$(v) [(a^m)^n]^l = a^{mnl}$$

$$(vi) a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

(vii) $a^0 = 1$ {किसी भी संख्या की घात शून्य हो तो, उस पूरी राशि का मान 1 होता है।}

$$(viii) (a/b)^{-m} = (b/a)^m$$

$$(ix) a^m = b^n$$

$$a = (b)^{n/m} \text{ or } b = (a)^{m/n}$$

$$(x) a^m = b \text{ तो } a = b^{1/m}$$

● यदि Power मिन्न रूप में हो तो बड़ा या छोटा value निकालना हो घात के हर का L.S.P. लेंगे और L.S.P. से प्रत्येक घात को गुणा करेंगे और जिसकी बड़ी value आयेगी वह बड़ा होगा और जिसकी छोटी value आएगी वह छोटा होगा।

$$\text{उदा. } (2)^{\frac{1}{4}}, (3)^{\frac{1}{6}}, (4)^{\frac{1}{8}}, (8)^{\frac{1}{12}}$$

$$\text{हल } (2)^{\frac{1}{4} \times 24} = 2^6 = 64$$

$$(3)^{\frac{1}{6} \times 24} = 3^4 = 81$$

$$(4)^{\frac{1}{8} \times 24} = 4^3 = 64$$

$$(8)^{\frac{1}{12} \times 24} = 8^2 = 64$$

अतः $3^{\frac{1}{6}}$ बड़ा है (नोट – यहाँ 4, 6, 8, 12 का L.S.P. 24 है।)

अभ्यास प्रश्न



प्रश्नों के हल



उदा.1 $\sqrt{214 + \sqrt{107 + \sqrt{196}}}$ का मान है।

(a) 23

(b) 15

(c) 24

(d) 18

उत्तर – (b)

उदा.2 निम्न का मान क्या होगा ?

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$$

(a) 5

(b) 3

(c) 2

(d) 30

उत्तर – (b)

उदा.3 निम्न का मान ज्ञात करो ?	$\sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$	(a) 2 (b) 4 (c) ± 2 (d) -2	उत्तर— (c)	उदा.10 $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$ का वर्गमूल क्या होगा ? (a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$
उदा.4	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ का मान होगा ?	(a) $2\sqrt{10}$ (b) 0 (c) $2\sqrt{6}$ (d) $2\sqrt{15}$	उत्तर— (b)	उदा.11 यदि x, y परिमेय संख्याएँ हो और $\frac{5+\sqrt{11}}{3-2\sqrt{11}} = x+y\sqrt{11}$ हो तो x और y का मान होगा ? (a) $x=\frac{-14}{17}, y=\frac{-13}{26}$ (b) $x=\frac{4}{13}, y=\frac{11}{17}$ (c) $x=\frac{-27}{25}, y=\frac{-11}{37}$ (d) $x=\frac{-37}{35}, y=\frac{-13}{35}$
उदा.5	$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ का मान क्या है ?	(a) 1 (b) 0 (c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{7}$	उत्तर— (b)	उत्तर— (d)
उदा.6	$\sqrt{2^3\sqrt{4\sqrt{2^3\sqrt{4\ldots\ldots}}}}$ का मान है ?	(a) 2 (b) 2^2 (c) 2^3 (d) 2^5	उत्तर— (a)	उदा.12 यदि $\sqrt{50} + \sqrt{128} = \sqrt{N}$ तो N का मान क्या है ? (a) 26 (b) 390 (c) 338 (d) 182
उदा.7	$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}$ में से सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?	(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{3}$ (c) $\sqrt[4]{4}$ (d) $\sqrt[6]{6}$	उत्तर— (b)	उदा.13 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots}}}$ के बराबर है ? (a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 3
उदा.8	निम्नलिखित को अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें (बड़े से छोटा) । $\sqrt[3]{4}, \sqrt{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[4]{5}$	(a) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{3}$ (b) $\sqrt[3]{4} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{5}$ (c) $\sqrt{2} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{5}$ (d) $\sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{4} > \sqrt{2}$	उत्तर— (a)	उत्तर— (c)
उदा.9	इनमें से सबसे छोटी संख्या है $\sqrt[6]{12}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt{3}$	(a) $\sqrt[6]{12}$ (b) $\sqrt[3]{4}$ (c) $\sqrt[4]{5}$ (d) $\sqrt{3}$	उत्तर— (c)	उदा.14 जब $(4+\sqrt{7})$ को पूर्ण वर्ग के रूप में लिखा जाता है तो वह निम्न में से किसके बराबर होगा ? (a) $(2+\sqrt{7})^2$ (b) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$ (c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{7}+1)\right\}^2$ (d) $(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2$
उदा.10	व्यंजक $\sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ का मान होगा —	(a) 3 (b) 1 (c) 8 (d) 2	उत्तर— (d)	उदा.15 व्यंजक $\sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ का मान होगा —

उदा.16 यदि $\sqrt{7} = 2.6457$ और $\sqrt{3} = 1.732$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) 1.0944 (b) 1.944
 (c) 1.009 (d) 1.0844

उत्तर— (a)

उदा.17 यदि $10^{0.48} = X$, $10^{0.70} = y$ और $X^z = y^2$, तो z का लगभग मान होगा:

- (a) 1.45 (b) 1.88
 (c) 2.9 (d) 3.7

उत्तर— (c)

उदा.18 यदि $5^a = 3125$, तो $5^{(a-3)}$ का मान होगा?

- (a) 25 (b) 125
 (c) 625 (d) 1625

उत्तर— (a)

$$\text{उदा.19 } \frac{(243)^{\frac{n}{5}} \times 3^{2n+1}}{g^n \times 3^{n-1}} = ?$$

- (a) 1 (b) 2
 (c) 9 (d) 9^n

उत्तर— (c)

उदा.20 यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$ तब $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ किसके बराबर होगा ?

- (a) 0 (b) 1
 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

उत्तर— (a)

उदा.21 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

- $3^{50}, 4^{40}, 5^{30}$ और 6^{20}
 (a) 3^{50} (b) 4^{40}
 (c) 5^{30} (d) 6^{20}

उत्तर— (b)

उदा.22 निम्न संख्याओं में सबसे छोटा है :

- $2^{250}, 3^{150}, 5^{100}, 4^{200}$
 (a) 2^{250} (b) 3^{150}
 (c) 5^{100} (d) 4^{200}

उत्तर— (c)

उदा.23 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौन सी है ?

$$\frac{4}{9}, \sqrt{\frac{9}{49}}, 0.49, (0.7)^2$$

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\sqrt{\frac{9}{49}}$
 (c) 0.47 (d) $(0.7)^2$

उत्तर— (d)



Topperclass Unleash the topper in you

5

CHAPTER

अनुपात एवं समानुपात (Ratio & Proportion)



अनुपात

- दो संख्याओं या राशियों की विभाजन से तुलना एक अनुपात कही जाती है।
 - संकेत :-
 - a से b का अनुपात निम्न तरीके से लिखा जा सकता है।
- $$a:b = \frac{a}{b} = a \div b$$
- अनुपात का पहला पद, पूर्व पद कहलाता है तथा दूसरे पद को अंतिम पद कहते हैं।

मिश्रित अनुपात

दो या दो से अधिक अनुपात के पूर्व पदों के गुणनफल तथा अंतिम पदों के गुणनफल से बने नए अनुपात को मिश्रित अनुपात कहते हैं।

जैसे - 4 : 3, 9 : 13, 26 : 5, 2 : 15 का मिश्रित अनुपात

$$\frac{4 \times 9 \times 26 \times 2}{3 \times 13 \times 5 \times 15} = \frac{16}{25}$$

विलोम या व्युत्क्रमानुपात

वह अनुपात जिसमें पहली प्रकार की राशि के बढ़ने से दूसरी प्रकार की राशि घटे, विलोमानुपात कहलाता है।

$$a : b \text{ का विलोमानुपात } = \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} \right) \times (\text{a तथा b का LCM})$$

सम्मिलित अनुपात

- यदि पहली व दूसरी राशियों के बीच अनुपात = a : b दूसरी व तीसरी राशियों के बीच अनुपात = c : d तब तीनों राशियों के बीच सम्मिलित अनुपात

$$\begin{array}{c} a : b \\ \diagdown \quad \diagup \\ c : d \\ \hline ac : bc : bd \end{array}$$

उदा. यदि A : B = 4 : 5 तथा B : C = 6 : 7 तो A : C = ?

हल

$$\begin{array}{r} A : B : C \\ 4 : 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 6 : 7 \\ \hline 24 : 30 : 35 \end{array}$$

अतः A : C = 24 : 35

- पहली व दूसरी राशि के बीच अनुपात = a : b दूसरी व तीसरी राशि के बीच अनुपात = c : d तीसरी व चौथी राशि के बीच अनुपात = e : f

$$\begin{array}{ccccc} a & : & b & & \\ & \searrow & \swarrow & & \\ & & c & : & d \\ & & \searrow & \swarrow & \\ & & & e & : f \\ \hline ace & : & bce & : & bde & : bdf \end{array}$$

उदा. यदि A : B = 1 : 2, B : C = 3 : 4, C : D = 2 : 3 तब A : B : C : D = ?

हल A : B : C : D

$$\begin{array}{cccc} 1 & : & 2 & \\ 3 & : & 4 & \\ \hline 2 & : & 3 & \end{array}$$

$$6 : 12 : 16 : 24 \text{ या } 3 : 6 : 8 : 12$$

समानुपात

समानुपात :- चार राशियाँ एक समानुपात में कही जाती हैं, यदि पहली और दूसरी राशियों का अनुपात तीसरी और चौथी राशियों के अनुपात के बराबर हो।

- दोनों अनुपात को बराबर बताने के लिए संकेत '∴' या '=' का प्रयोग किया जाता है।

निम्नलिखित दो अनुपातों पर विचार कीजिए :-

$$\begin{array}{ll} \text{पहला अनुपात} & \text{दूसरा अनुपात} \\ 6 : 18 & 8 : 24 \\ \hline \end{array}$$

6 : 18 एवं 8 : 24 दोनों में ही 6, 18 का एक तिहाई व 8, 24 का एक तिहाई हैं। अनुपातों की इस समानता को ही समानुपात कहते हैं।

उदा. 6 तथा 9 का प्रथम समानुपाती क्या होगा ?

$$\text{हल } a = \frac{b^2}{c} = \frac{6^2}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

उदा. 0.32 तथा 0.02 का मध्य समानुपाती क्या होगा ?

$$\text{हल } b = \sqrt{ac} \Rightarrow \sqrt{0.32 \times 0.02} = \sqrt{0.0064} = 0.08$$

उत्तर

- यदि a : b :: c : d हो, तो हम a तथा b को बाह्य पद और c तथा d को मध्य पद कहते हैं।
बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल
(a × d) = (b × c)

मध्यानुपाती (a, b)

माना मध्यानुपाती x है तब

$$a : x :: x : b$$

$$x^2 = ab$$

$$x = \sqrt{ab}$$

• तृतीयानुपाती (a, b)

माना तृतीयानुपाती x है तब

$$a : b :: b : x$$

$$b^2 = ax$$

$$x = \frac{b^2}{a}$$

• चतुर्थानुपाती (a, b, c)

माना चतुर्थानुपाती x है तब

$$a : b :: c : x$$

$$ax = bc$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

अनुपात के बारे में कुछ तथ्य

1. एकांतरानुपात (Alternendo)

$$\text{यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तो } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

2. विलोमानुपात (Invertendo)

$$\text{यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तो } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

3. योगानुपात (Componendo)

यदि $a : b :: c : d$ हो

$$\text{तो } (a+b) : b :: (c+d) : d$$

$$\text{अर्थात् } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{तो } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

4. अंतरानुपात (Dividendo)

यदि $a : b :: c : d$ तो

$$(a-b) : b :: (c-d) : d$$

$$\text{अर्थात् } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तब } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

5. योगान्तरानुपात (Compendo & Dividendo)

यह योगानुपात तथा अन्तरानुपात का सम्मिलित रूप हैं।

यदि $a : b :: c : d$ एक समानुपात हो।

$$\text{तो } (a+b) : (a-b) :: (c+d) : (c-d)$$

$$\text{या } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

अनुपात के गुण

- (1) अनुपात के अंश व हर को समान संख्या से गुणा करने पर कोई परिवर्तन नहीं आता है।

जैसे :— $\frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{9}$ (इस $\frac{2}{3}$ व $\frac{6}{9}$ के अनुपातों का मान समान ही है)

- (2) अंश व हर दोनों को समान राशि से भाग करने पर अनुपात का मान वही रहता है।

$$\text{जैसे :— } \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \quad (\text{ये सभी अनुपात समान हैं})$$

- (3) यदि x को P तथा Q के मध्य a : b के अनुपात में बाँटा जाता हो, तो

$$P \text{ का भाग} = \frac{a}{a+b} \times x$$

$$Q \text{ का भाग} = \frac{b}{a+b} \times x$$

$$P \text{ तथा } Q \text{ के भागों का अंतर} = \frac{a-b}{a+b} \times x \quad (\text{जहाँ } a > b)$$

- (4) P, Q, R के भागों में a : b : c का अनुपात होने पर यदि P का भाग x हो तो —

$$(i) Q \text{ का भाग} = \frac{b}{a} \times x$$

$$(ii) R \text{ का भाग} = \frac{c}{a} \times x$$

$$(iii) Q \text{ तथा } R \text{ के भागों का अंतर} = \frac{b-c}{a} \times x \quad (\text{जहाँ } b > c)$$

$$(iv) P, Q \text{ तथा } R \text{ का कुल भाग} = \frac{a+b+c}{a} \times x$$

- (5) यदि हिस्से में जोड़ने या घटाने के बाद अनुपात प्राप्त होता है।

$$x = \frac{\text{कुल राशि} \pm \text{अतिरिक्त राशि}}{\text{अनुपात का योग}}$$

उदा. A के हिस्से में 20 रूपये मिला दिये जाए तथा B के हिस्से से 25 रूपये निकाले जाये तो उनके हिस्सों का अनुपात 4 : 5 हो जाता है। यदि कुल राशि 2165 रूपये हो तो A का हिस्सा कितना रूपया होगा।

$$\text{हल } \frac{2165 - 5}{9} \Rightarrow \frac{2160}{9} = 240$$

$$A + 20 = 4 \times 240$$

$$A = 960 - 20 = 940$$

$$B - 25 = 5 \times 240$$

$$B = 1200 + 25 = 1225$$

निकालने की प्रक्रिया बार-बार दोहराने पर

- एक कंटेनर जिसमें a लीटर द्रव है, b लीटर निकालकर उसकी जगह पर उतना ही पानी मिला दिया जाता है। यह प्रक्रिया 'n' बार दोहराई जाती है तो n बार क्रिया के बार कंटेनर में बचे हुए दूध की मात्रा —

$$= a \left(1 - \frac{b}{a} \right)^n \text{ लीटर}$$

- यदि दूध और पानी के x लीटर मिश्रण में दूध एवं पानी a : b के अनुपात में हो तो उस मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात c : d करने के लिए उसमें $\frac{x(ad-bc)}{c(a+b)}$ लीटर पानी मिलाना होगा।

आय/व्यय पर आधारित



प्रश्नों के हल



- उदा.1** व्यक्ति के खर्च और बचत का अनुपात $26 : 3$ है। यदि उसकी मासिक आय $14,500$ रुपये हो, तो उसकी मासिक बचत कितनी है ?
 (a) 580 (b) 700
 (c) 1,500 (d) 1,560

उत्तर

- उदा.2** A तथा B की मासिक आय का अनुपात $5 : 4$ है, मासिक खर्च का अनुपात $19 : 21$ है तथा उनकी मासिक बचत का अनुपात $37 : 18$ है। यदि A तथा B की कुल वार्षिक बचत $66,000$ रुपये हो, तो प्रत्येक की मासिक आय कितनी है ?

- उदा.3** A और B की साप्ताहिक आय का अनुपात $9 : 7$ और खर्च का अनुपात $4 : 3$ है। यदि प्रत्येक 200 रुपये की बचत करता है तो उसकी आय का योग कितना होगा ?
 (a) 3,600 (b) 3,200
 (c) 4,800 (d) 5,600

उत्तर

सिक्कों पर आधारित



प्रश्नों के हल



- उदा.1** एक थैली में 1 रुपये, 50 पैसे तथा 25 पैसे के सिक्के $5 : 6 : 8$ के अनुपात में हैं। यदि इस थैली में कुल 210 रुपये हो तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

- उदा.2** 1 रुपये, 50 पैसे तथा 25 पैसे के 378 सिक्कों के मूल्यों $13 : 11 : 7$ है, इनमें से 50 पैसे के सिक्कों की संख्या कितनी है ?
 (a) 128 (b) 132
 (c) 133 (d) 136

उत्तर

औसत व आयु आधारित



प्रश्नों के हल



- उदा.1** दो लड़कों की आयु का वर्तमान अनुपात $5 : 6$ है। 2 साल बाद यह अनुपात $7 : 8$ हो जाता है। तो 12 साल बाद अनुपात क्या होगा ?
 (a) $\frac{22}{24}$ (b) $\frac{15}{16}$
 (c) $\frac{17}{18}$ (d) $\frac{11}{12}$

उत्तर

(c)

- उदा.2** दो छात्रों की आयु का अनुपात $3 : 2$ है, इनमें से एक-दूसरे से 5 वर्ष बड़ा है तो छोटे छात्र की आयु कितनी होगी ?

- (a) 5 वर्ष (b) $5\frac{1}{2}$ वर्ष
 (c) 10 वर्ष (d) 15 वर्ष

उत्तर

- उदा.3** दो व्यक्तियों की वर्तमान आयु क्रमशः 36 और 50 वर्ष हैं। यदि n वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात $3 : 4$ होगा, तो n का मान है ?
 (a) 4 (b) 7
 (c) 6 (d) 3

उत्तर

अनुपात के रूप में विभाजित हिस्सों पर आधारित



प्रश्नों के हल



- उदा.1** एक व्यक्ति ने अपनी सम्पत्ति को इस प्रकार से विभक्त किया कि उसकी पुत्री तथा पत्नी के भाग और उसकी पत्नी तथा पुत्र के भाग में से प्रत्येक $3 : 1$ के अनुपात में हो। यदि पुत्र को पुत्री से 10,000 रुपये कम मिले हो, तो सम्पत्ति का कुल मूल्य कितना है ?

- (a) 15,250 रुपये (b) 16,250 रुपये
 (c) 17,500 रुपये (d) 18,500 रुपये

उत्तर

- उदा.2** 600 रुपये को A, B तथा C में इस प्रकार वितरित किया गया है कि A के $\frac{2}{5}$ से 40 रुपये अधिक, B के $\frac{2}{7}$ से 20 रुपये अधिक तथा C के $\frac{9}{17}$ से 10 रुपये अधिक परस्पर बराबर हैं, इनमें से A का भाग कितना है ?
 (a) 150 (b) 170
 (c) 200 (d) 280

- उदा.3** 555 को A, B और C में $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ अनुपात में विभाजित करना था, लेकिन गलती से 4: 5: 6 में विभाजित कर दिया गया तो C द्वारा कितनी राशि अधिक प्राप्त की गई।

- (a) 72 (b) 75
 (c) 22 (d) 52

उत्तर

(a)

उदा.2 लैपटॉप की कीमत में 25% की वृद्धि हुई। अब दूसरी बार कीमत में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई कि कुल वृद्धि 35% हो गई?

- (a) 7.5
- (b) 9
- (c) 8
- (d) 10

जनसंख्या से संबंधित सूत्र



- यदि किसी शहर की जनसंख्या P हो एवं यह x% प्रतिवर्ष की दर से बढ़ रही हो, तो n वर्षों के बाद जनसंख्या

$$= P \left(1 + \frac{x}{100} \right)^n$$

- यदि कम हो रही हो, तो जनसंख्या

$$= P \left(1 - \frac{x}{100} \right)^n$$

उदा.1 यदि किसी शहर की जनसंख्या 4% प्रतिवर्ष की दर से बढ़ रही हो तथा लोगों की वर्तमान संख्या 15625 हो, तो 3 वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

उदा.2 किसी शहर की जनसंख्या 8000 है। यदि पुरुषों की संख्या 6 प्रतिशत की दर से बढ़े एवं महिलाओं की संख्या में वृद्धि की रफतार 10 प्रतिशत हो, तो जनसंख्या 8600 हो जाएगी। शहर में महिलाओं की संख्या ज्ञात करें।

उदा.3 1988 में किसी शहर की जनसंख्या 12% कम हो गई। 1989 में इसमें 15% की वृद्धि हुई। 1990 के आरम्भ में शहर की जनसंख्या पर कुल मिलाकर कितना प्रभाव पड़ा था?

- यदि किसी राशि का x प्रतिशत पहले व्यक्ति ने ले लिया हो, शेष का y प्रतिशत दूसरे व्यक्ति ने लिया हो तथा जो शेष बचे उसका z प्रतिशत तीसरे व्यक्ति द्वारा लेने के उपरान्त यदि A राशि बच जाए, तो आरंभ में कुल राशि

$$= \frac{A \times 100 \times 100 \times 100}{(100-x)(100-y)(100-z)}$$

- वस्तुओं के भाव में वृद्धि या कमी हो जाने पर उसके उपभोग में कमी अथवा वृद्धि

$$(a) \text{उपभोग में वृद्धि \%} = \frac{100 \times \text{कमी}}{100 - \text{कमी}}$$

$$(b) \text{उपभोग में कमी \%} = \frac{100 \times \text{वृद्धि}}{100 + \text{वृद्धि}}$$

चीनी के भाव – खपत में कमी



उदा.1 चीनी के भाव में 40% वृद्धि होने पर किसी परिवार को चीनी की वार्षिक खपत कितने प्रतिशत कम करनी होगी जिससे परिवार का खर्च न बढ़े?

- (a) $24\frac{4}{7}\%$
- (b) $28\frac{4}{7}\%$
- (c) $29\frac{4}{7}\%$
- (d) $30\frac{4}{7}\%$

उदा.2 चीनी के मूल्य में 10% कमी होने पर कोई गृहिणी ₹ 1116 में 6.2 किग्रा. चीनी अधिक खरीद सकती है। चीनी का घटा हुआ मूल्य प्रति किग्रा. कितना है?

- (a) ₹ 12
- (b) ₹ 14
- (c) ₹ 16
- (d) ₹ 18

किसी त्रिभुज – विकर्ण आदि



- यदि किसी समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक भुजा या शीर्षलम्ब, वर्ग के प्रत्येक भुजा या विकर्ण या परिमिती, वृत्त की त्रिज्या, व्यास या परिधि, घन या घनाभ के प्रत्येक भुजा, किसी गोला या अर्द्धगोला के त्रिज्या या व्यास इत्यादि में x प्रतिशत की वृद्धि या कमी कर दी जाए, तो उसके क्षेत्रफल में प्रतिशत कमी या वृद्धि

$$= 2x \pm \frac{x^2}{100} + \text{वृद्धि कमी}$$

उदा.1 जब त्रिज्या में 25% की वृद्धि की जाती है, तो वृत्त के क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए?

- (a) 50%
- (b) 56.25%
- (c) 56%
- (d) 56.15%

उदा.2 यदि एक लम्ब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या और ऊँचाई में से प्रत्येक में 20% की वृद्धि की जाती है, तो बेलन का आयतन कितना बढ़ जाएगा?

- (a) 40%
- (b) 60%
- (c) 72.80%
- (d) 96%

समुच्चय पर आधारित प्रश्न



प्रश्नों के हल



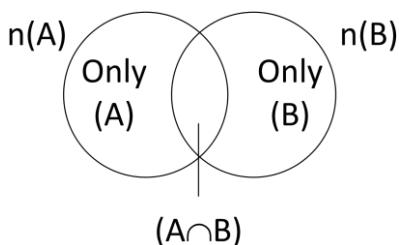
- $n(A \cup B) = A$ व B मिलकर या कम से कम एक हो ।

$n(A \cap B)$ = दोनों में शामिल हो ।

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

केवल $A = n(A) - n(A \cap B)$

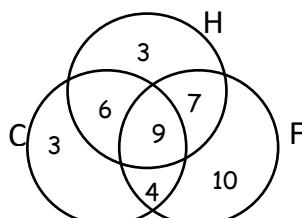
केवल $B = n(B) - n(A \cap B)$



- उदा.1 किसी विद्यालय में क्रिकेट टीम में 22, हॉकी टीम में 25 तथा फुटबॉल टीम में 30 लडके हैं । अब यदि 15 लडके हॉकी और क्रिकेट, 16 लडके हॉकी और फुटबॉल, 13 लडके फुटबॉल और क्रिकेट खेलते हैं, तो खेलने वाले कुल लडकों की संख्या ज्ञात कीजिए?

हल माना C , H और F क्रमशः क्रिकेट, हॉकी तथा फुटबॉल खेलने वाले लडकों का समुच्चय है । दिया है $= n(C) = 22$, $n(H) = 25$, $n(F) = 30$, $n(C \cap H \cap F) = 9$

$$n(C \cap H) = 15, n(H \cap F) = 16$$
 तथा $n(C \cap F) = 13$



अब केवल C व H , खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या $= n(C \cap H) - n(C \cap H \cap F)$

$$= 15 - 9 = 6$$

केवल H व F खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या $= n(H \cap F) - n(C \cap H \cap F)$

$$\begin{aligned} \text{केवल } C \text{ व } F \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} &= \\ n(C \cap F) - n(C \cap H \cap F) & \\ &= 13 - 9 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{केवल } C \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} &= 22 \\ - 6 - 9 - 4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{केवल } H \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} &= 25 \\ - 6 - 9 - 4 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा केवल } F \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} &= \\ 30 - 7 - 9 - 4 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः खिलाड़ियों की कुल संख्या} &= 3 + 6 + 3 + 9 \\ + 7 + 10 + 4 &= 42 \end{aligned}$$

उदा.2 एक दफ्तर में 72% कर्मचारी चाय पीना पसंद करते हैं तथा 44% कॉफी पीना पसंद करते हैं । यदि प्रत्येक कर्मचारी दोनों में से एक अवश्य पसंद करें तथा 40 दोनों को पसंद करें, तो दफ्तर में कुल कर्मचारियों की संख्या कितनी है ?

- (a) 200 (b) 240
(c) 250 (d) 320

हल: (c)

उदा.3 एक परीक्षा में 34% विद्यार्थी गणित में फेल हुए तथा 41% अंग्रेजी में । यदि 20% विद्यार्थी दोनों विषयों में फेल हुए हो, तब दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत कितना है ?

- (a) 44% (b) 50%
(c) 54% (d) 56%

उदाहरण



- उदा.1** एक भिन्न के अंश में 220% वृद्धि तथा हर में 150% वृद्धि करने पर परिणामी भिन्न $4/5$ है। मूल भिन्न क्या है ?
 (a) $5/8$ (b) $3/5$
 (c) $4/5$ (d) $5/6$
 (e) इनमें से कोई नहीं
- उदा.2** यदि x, y से 10% अधिक हो, तो y, x से कितने प्रतिशत कम है ?
 (a) $9 \frac{1}{11} \%$ (b) $8 \frac{1}{11} \%$
 (c) $7 \frac{1}{11} \%$ (d) $10 \frac{1}{11} \%$
- उदा.3** एक व्यक्ति अपनी आय का 75% खर्च करता है। उसकी आय में 20% की वृद्धि होती है तथा साथ ही उसके खर्च में भी 10% की वृद्धि होती है। उसके बचत में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें ?
- उदा.4** एक आदमी अपनी आय का 20% भोजन पर, 15% बच्चों की शिक्षा पर खर्च करता है। बच्ची हुई आय का 40% मनोरंजन और परिवार पर, 30% मेडिकल पर खर्च करता है। इन सबके बाद उसके पास 8775 रु. बच जाते हैं। उसकी मासिक आय ज्ञात करो ?
- उदा.5** चीनी तथा पानी के 12 लीटर घोल में 4% चीनी है। घोल को गर्म करके वाष्प द्वारा 2 लीटर पानी उड़ा दिये जाने पर शेष घोल में कितने प्रतिशत चीनी है ?
 (a) 1.4% (b) 5.2%
 (c) 4.8% (d) 3.4%
- उदा.6** एक परीक्षा में 900 लड़कियाँ तथा 1100 लड़के बैठे। इनमें से 40% लड़कियाँ तथा 50% लड़के उत्तीर्ण हुये। कुल कितने प्रतिशत विद्यार्थी अनुत्तीर्ण रहे ?
 (a) 45% (b) 45.5%
 (c) 54.5% (d) 59.2%

उदा.7 किसी परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए 40% अंक चाहिए। A ने उत्तीर्णाक से 10% कम अंक प्राप्त किये तथा B ने A से $11 \frac{1}{9}\%$ कम अंक प्राप्त किये, कम अंक प्राप्त किये। ज्ञात कीजिए कि C इस परीक्षा में उत्तीर्ण हुआ अथवा नहीं।

- उदा.8** एक चुनाव में दो उम्मीदवार थे। एक उम्मीदवार 30% मत लेकर 16000 मतों से हार गया। कुल कितने मत पड़े ?
 (a) 24000 (b) 28000
 (c) 30000 (d) 40000

- उदा.9** दो उम्मीदवार के बीच हुए एक चुनाव में एक उम्मीदवार को कुल वैध मतों के 52% मत मिले तथा कुल मतों के 25% मत अवैध है। यदि कुल मतों की संख्या 8400 हो, तो दूसरे उम्मीदवार को कितने वैध मत मिले ?
 (a) 3276
 (b) 3196
 (c) 3024
 (d) निर्धारित नहीं किया जा सकता

- उदा.10** एक चुनाव में दो उम्मीदवार थे। इसमें 75% मतदाताओं ने अपनी मताधिकार का प्रयोग किया तथा इनमें से 2% मतों को अवैध घोषित कर दिया गया। एक उम्मीदवार ने 9261 मत प्राप्त किये जो वैध मतों के 75% थे। मतदाता सूची में कुल कितने मतदाता थे ?