Toppersnotes®
Unleash the topper in you

BPSC

TRE 4.0

बिहार लोक सेवा आयोग (BPSC)

भाग - 3

(गणित, रीजनिंग एवं बिहार का सामान्य ज्ञान)

सामान्य अध्ययन - II

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

विषयसूची

1 CHAPTER

अनुपात एवं समानुपात (Ratio & Proportion)

अनुपात

- दो संख्याओं या राशियों की विभाजन से तुलना एक अनुपात कही जाती है।
- संकेत –:
- a से b का अनुपात निम्न तरीके से लिखा जा सकता है।

$$\boxed{a:b=\frac{a}{b}=a\div b}$$

- अनुपात का पहला पद, पूर्व पद कहलाता है तथा दूसरे पद को अंतिम पद कहते है।

मिश्रित अनुपात

दो या दो से अधिक अनुपात के पूर्व पदों के गुणनफल तथा अंतिम पदों के गुणनफल से बने नए अनुपात को मिश्रित अनुपात कहते हैं।

जैसे – 4 : 3, 9 : 13, 26 : 5, 2 : 15 का मिश्रित अनुपात

$$\frac{4\times 9\times 26\times 2}{3\times 13\times 5\times 15}=\frac{16}{25}$$

विलोम या व्युत्क्रमानुपात

वह अनुपात जिसमें पहली प्रकार की राशि के बढ़ने से दूसरी प्रकार की राशि घटे, विलोमानुपात कहलाता है ।

a : b का विलोमानुपात $=\left(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}\right)\times$(a तथा b का LCM)

सम्मिलित अनुपात

1. यदि पहली व दूसरी राशियों के बीच अनुपात = a : b
   दूसरी व तीसरी राशियों के बीच अनुपात = c : d
   तब तीनों राशियों के बीच सम्मिलित अनुपात

$$\begin{array}{ccccc} a & : & b & & \\ & & c & : & d \\ \hline ac & : & bc & : & bd \end{array}$$

उदा. यदि A : B = 4 : 5 तथा B : C = 6 : 7 तो A : C = ?

हल

$$\begin{array}{ccccc} A & : & B & : & C \\ 4 & : & 5 & & \\ & & 6 & : & 7 \\ \hline 24 & : & 30 & : & 35 \end{array}$$

अतः A : C = 24 : 35

2. पहली व दूसरी राशि के बीच अनुपात = a : b
   दूसरी व तीसरी राशि के बीच अनुपात = c : d
   तीसरी व चौथी राशि के बीच अनुपात = e : f

$$\begin{array}{ccccccc} a & : & b & & & & \\ & & c & : & d & & \\ & & & & e & : & f \\ \hline ace & : & bce & : & bde & : & bdf \end{array}$$

उदा. यदि A : B = 1 : 2, B : C = 3 : 4, C : D = 2 : 3 तब A : B : C : D = ?

हल

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & B & : & C & : & D \\ 1 & : & 2 & & & & \\ & & 3 & : & 4 & & \\ & & & & 2 & : & 3 \\ \hline 6 & : & 12 & : & 16 & : & 24 \end{array}$$

या 3 : 6 : 8 : 12

समानुपात

समानुपात :– चार राशियाँ एक समानुपात में कही जाती है, यदि पहली और दूसरी राशियों का अनुपात तीसरी और चौथी राशियों के अनुपात के बराबर हो।

- दोनों अनुपात को बराबर बताने के लिए संकेत ': :' या '=' का प्रयोग किया जाता है।

निम्नलिखित दो अनुपातों पर विचार कीजिए :–

पहला अनुपात	दूसरा अनुपात
6 : 18	8 : 24

6 : 18 एवं 8 : 24 दोनों में ही 6, 18 का एक तिहाई व 8, 24 का एक तिहाई हैं। अनुपातों की इस समानता को ही समानुपात कहते हैं।

उदा. 6 तथा 9 का प्रथम समानुपाती क्या होगा ?

हल $a=\frac{b^2}{c}=\frac{6^2}{9}=\frac{36}{9}=4$

उदा. 0.32 तथा 0.02 का मध्य समानुपाती क्या होगा ?

हल $b=\sqrt{ac}\Rightarrow\sqrt{0.32\times 0.02}=\sqrt{0.0064}\Rightarrow 0.08$ उत्तर

- यदि a : b : : c : d हो, तो हम a तथा b को बाह्य पद और b तथा c को मध्य पद कहते हैं।
  बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल
  (a × d) = (b × c)

- **मध्यानुपाती (a, b)**
  माना मध्यानुपाती x है तब
  a : x : : x : b
  $x^2 = ab$
  $x=\sqrt{ab}$

- **तृतीयानुपाती (a, b)**
  माना तृतीयानुपाती x है तब
  $a : b :: b : x$
  $b^2 = ax$
  $x = \frac{b^2}{a}$

- **चतुर्थानुपाती (a, b, c)**
  माना चतुर्थानुपाती x है तब
  $a : b :: c : x$
  $ax = bc$
  $x = \frac{bc}{a}$

अनुपात के बारे में कुछ तथ्य

1. एकांतरानुपात (Alternendo)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2. विलोमानुपात (Invertendo)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

3. योगानुपात (Componendo)

यदि $a : b :: c : d$ हो
तो $(a + b) : b :: (c + d) : d$
अर्थात् $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
तो $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

4. अंतरानुपात (Dividendo)

यदि $a : b :: c : d$ तो
$(a - b) : b :: (c - d) : d$
अर्थात् $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तब $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

5. योगान्तरानुपात (Compendo & Dividendo)

यह योगानुपात तथा अन्तरानुपात का सम्मिलित रुप हैं।
यदि $a : b :: c : d$ एक समानुपात हो।
तो $(a + b) : (a - b) :: (c + d) (c - d)$
या $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

अनुपात के गुण

(1) अनुपात के अंश व हर को समान संख्या से गुणा करने पर कोई परिवर्तन नहीं आता है।
जैसे :– $\frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{9}$ (इस $\frac{2}{3}$ व $\frac{6}{9}$ के अनुपातों का मान समान ही है)

(2) अंश व हर दोनों को समान राशि से भाग करने पर अनुपात का मान वही रहता है।
जैसे :– $\frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{2}} = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{4}{3}}$ (ये सभी अनुपात समान है)

(3) यदि x को P तथा Q के मध्य $a : b$ के अनुपात में बाँटा जाता हो, तो
P का भाग $= \frac{a}{a+b} \times x$
Q का भाग $= \frac{b}{a+b} \times x$
P तथा Q के भागों का अंतर $= \frac{a-b}{a+b} \times x$ (जहाँ $a > b$)

(4) P, Q, R के भागों में $a : b : c$ का अनुपात होने पर यदि P का भाग x हो तो –
(i) Q का भाग = $\frac{b}{a} \times x$
(ii) R का भाग = $\frac{c}{a} \times x$
(iii) Q तथा R के भागों का अंतर = $\frac{b-c}{a} \times x$ (जहाँ $b > c$)
(iv) P, Q तथा R का कुल भाग $= \frac{a+b+c}{a} \times x$

(5) यदि हिस्सा में जोड़ने या घटाने के बाद अनुपात प्राप्त होता है ।
$x = \frac{\text{कुल राशि} \pm \text{अतिरिक्त राशि}}{\text{अनुपात का योग}}$

उदा. A के हिस्से में 20 रुपये मिला दिये जाए तथा B के हिस्से से 25 रुपये निकाले जाये तो उनके हिस्सों का अनुपात 4 : 5 हो जाता है। यदि कुल राशि 2165 रुपये हो तो A का हिस्सा कितना रुपया होगा।

हल $\frac{2165-5}{9} \Rightarrow \frac{2160}{9} = 240$
$A + 20 = 4 \times 240$
$A = 960 - 20 = 940$
$B - 25 = 5 \times 240$
$B = 1200 + 25 = 1225$

निकालने की प्रक्रिया बार–बार दोहराने पर

- एक कंटेनर जिसमें a लीटर द्रव है, b लीटर निकालकर उसकी जगह पर उतना ही पानी मिला दिया जाता है। यह प्रक्रिया 'n' बार दोहराई जाती है तो n वीं क्रिया के बार कंटेनर में बचे हुए दूध की मात्रा –
  $= a\left(1 - \frac{b}{a}\right)^n$ लीटर
- यदि दूध और पानी के x लीटर मिश्रण में दूध एवं पानी $a : b$ के अनुपात में हो तो उस मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात $c : d$ करने के लिए उसमें $\frac{x(ad-bc)}{c(a+b)}$ लीटर पानी मिलाना होगा।

मोमबत्ती पर आधारित प्रश्न

समान ऊँचाई की दो मोमबत्तियाँ एक ही समय पर जलाई जाती हैं। पहली मोमबत्ती T_1 घंटे में पूरी जलती है तथा दूसरी मोमबत्ती T_2 घंटे में पूरी जलती है, तो $\frac{T_1T_2(a-b)}{aT_1-bT_2}$ घंटे बाद बचे हुए भाग की ऊँचाई का अनुपात a : b होगा।

अभ्यास प्रश्न

साधारण अनुपात–आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि 1000 रुपये को A तथा B में 3:2 के अनुपात में विभक्त करें, तो A को प्राप्त होंगे –

(a) 400 रुपये (b) 500 रुपये
(c) 600 रुपये (d) 800 रुपये

उत्तर (c)

उदा.2 किसी मैदान की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 5:2 है। यदि मैदान को चौड़ाई 40 मीटर हो, तब मैदान की लम्बाई ज्ञात करें ?

(a) 200 मीटर (b) 100 मीटर
(c) 50 मीटर (d) 80 मीटर

उदा.3 एक पेपर बण्डलों से भरा हुआ बक्सा 36 किलोग्राम वजनी है। यदि बक्से और पेपर बण्डल का वजन 3:22 के अनुपात में हो तो पेपर का वजन ज्ञात करें।

(a) 30680 ग्राम (b) 30710 ग्राम
(c) 31500 ग्राम (d) 31680 ग्राम

उत्तर (d)

संख्याओं के जोड़, गुणन और घटाने पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 दो प्राकृत संख्याएँ 3 : 5 के अनुपात में हैं तथा इनका गुणनफल 2160 है। इनमें से छोटी संख्या क्या होगी ?

(a) 36 (b) 24
(c) 8 (d) 12

उत्तर (a)

उदा.2 तीन संख्याएँ क्रमशः 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं। पहली तथा तीसरी संख्या का योग दूसरी संख्या से 52 अधिक है तो सबसे बड़ी संख्या क्या है ?

(a) 65 (b) 52
(c) 79 (d) 63
(e) इनमें से कोई नही

उत्तर (a)

उदा.3 दो संख्याओं के अन्तर, योगफल तथा गुणनफल का अनुपात 1 : 7 : 24 है, इन संख्याओं का गुणनफल कितना होगा ?

(a) 36 (b) 52
(c) 48 (d) 40

उत्तर (c)

अनुपात–समानुपात पर आधार

प्रश्नों के हल

उदा.1 वह कौन–सी भिन्न है जिसका $\frac{1}{27}$ के साथ वही अनुपात है जो $\frac{3}{11}$ तथा $\frac{5}{9}$ का अनुपात है ?

(a) $\frac{1}{11}$ (b) $\frac{3}{11}$
(c) 55 (d) $\frac{1}{55}$

उत्तर (d)

उदा.2 16 तथा 24 का तृतीयानुपाती क्या है ?

(a) 20 (b) 18
(c) 36 (d) 40

उत्तर (c)

उदा.3 6 तथा 54 के बीच मध्यानुपाती क्या है ?

(a) 9 (b) 12
(c) 16 (d) 18

उत्तर (d)

सम्मिलित/मिश्र अनुपात ज्ञात करना

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि 2A = 3B = 4C, तो A: B: C

(a) 2: 3: 4 (b) 4: 3: 2
(c) 6: 4: 3 (d) 3: 4: 6

उत्तर (c)

उदा.2 यदि $a:b=\frac{2}{9}:\frac{1}{3}, b:c=\frac{2}{7}:\frac{5}{14}$ तथा $d:c=\frac{7}{10}:\frac{3}{5}$ हो तो a : b : c : d = ?

उदा.3 यदि (a + b) : (b + c) : (c + a) = 6 : 7 : 8 तथा (a + b + c) = 14, तब c का मान है -

(a) 6 (b) 7
(c) 8 (d) 14

उत्तर (a)

आय/व्यय पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 व्यक्ति के खर्च और बचत का अनुपात 26 : 3 है। यदि उसकी मासिक आय 14,500 रुपये हो, तो उसकी मासिक बचत कितनी है ?

(a) 580 (b) 700
(c) 1,500 (d) 1,560

उत्तर (c)

उदा.2 A तथा B की मासिक आय का अनुपात 5 : 4 है, मासिक खर्च का अनुपात 19 : 21 है तथा उनकी मासिक बचत का अनुपात 37 : 18 है। यदि A तथा B की कुल वार्षिक बचत 66,000 रुपये हो, तो प्रत्येक की मासिक आय कितनी है ?

उदा.3 A और B की साप्ताहिक आय का अनुपात 9 : 7 और खर्च का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक 200 रुपये की बचत करता है तो उसकी आय का योग कितना होगा ?

(a) 3,600 (b) 3,200
(c) 4,800 (d) 5,600

उत्तर (b)

सिक्कों पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक थैली में 1 रुपये, 50 पैसे तथा 25 पैसे के सिक्के 5 : 6 : 8 के अनुपात में हैं। यदि इस थैली में कुल 210 रुपये हो तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

उदा.2 1 रुपये, 50 पैसे तथा 25 पैसे के 378 सिक्कों के मूल्यों 13 : 11 : 7 है, इनमें से 50 पैसे के सिक्कों की संख्या कितनी हैं ?

(a) 128 (b) 132
(c) 133 (d) 136

उत्तर (b)

औसत व आयु आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 दो लड़कों की आयु का वर्तमान अनुपात 5 : 6 है। 2 साल बाद यह अनुपात 7 : 8 हो जाता है। तो 12 साल बाद अनुपात क्या होगा ?

(a) $\frac{22}{24}$ (b) $\frac{15}{16}$
(c) $\frac{17}{18}$ (d) $\frac{11}{12}$

उत्तर (c)

उदा.2 दो छात्रों की आयु का अनुपात 3 : 2 है, इनमें से एक–दूसरे से 5 वर्ष बड़ा है तो छोटे छात्र की आयु कितनी होगी ?

(a) 5 वर्ष (b) $5\frac{1}{2}$ वर्ष
(c) 10 वर्ष (d) 15 वर्ष

उत्तर (c)

उदा.3 दो व्यक्तियों की वर्तमान आयु क्रमशः 36 और 50 वर्ष है । यदि n वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 3 : 4 होगा, तो n का मान है ?

(a) 4 (b) 7
(c) 6 (d) 3

उत्तर (c)

अनुपात के रूप में विभाजित हिस्सों पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक व्यक्ति ने अपनी सम्पत्ति को इस प्रकार से विभक्त किया कि उसकी पुत्री तथा पत्नी के भाग और उसकी पत्नी तथा पुत्र के भाग में से प्रत्येक 3 : 1 के अनुपात में हो । यदि पुत्र को पुत्री से 10,000 रुपये कम मिले हो, तो सम्पत्ति का कुल मूल्य कितना है ?

(a) 15,250 रुपये (b) 16,250 रुपये
(c) 17,500 रुपये (d) 18,500 रुपये

उत्तर (b)

उदा.2 600 रुपये को A, B तथा C में इस प्रकार वितरित किया गया है कि A के $\frac{2}{5}$ से 40 रुपये अधिक, B के $\frac{2}{7}$ से 20 रुपये अधिक तथा C के $\frac{9}{17}$ से 10 रुपये अधिक परस्पर बराबर हैं, इनमें से A का भाग कितना है ?

(a) 150 (b) 170
(c) 200 (d) 280

उदा.3 555 को A, B और C में $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$ अनुपात में विभाजित करना था, लेकिन गलती से 4: 5: 6 में विभाजित कर दिया गया तो C द्वारा कितनी राशि अधिक प्राप्त की गई।

(a) 72 (b) 75
(c) 22 (d) 52

उत्तर (a)

2 CHAPTER

साधारण ब्याज (Simple Interest)

मूलधन – निवेश की गयी राशि/कर्ज ली गयी राशि/उधार दी गयी राशि को मूलधन कहते है।

मिश्रधन – ब्याज सहित राशि/समय के अंत में लौटायी जाने वाली राशि/देय राशि आदि को मिश्रधन कहते है।

साधारण ब्याज – जब वास्तविक मूलधन पर किसी भी अवधि के लिए ब्याज की गणना की जाती है तो इसे साधारण ब्याज कहते है।

ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

साधारण ब्याज (S.I.) $= \frac{P \times R \times T}{100}$

जहाँ P = Principal Amount (मूलधन)

R = Rate of Interest (ब्याज की दर)

T = Time (समय)

(i) $R = \frac{SI \times 100}{P \times T}$ (ii) $T = \frac{SI \times 100}{P \times R}$

(iii) $P = \frac{SI \times 100}{T \times R}$

दिये गये दिनों के लिए ब्याज की गणना

- यदि समय दिनों की संख्या या वर्ष एवं दिनों की संख्या के रूप में दिया हो तो 365 दिन को एक वर्ष मानकर गणना की जाती है।
- यदि समय महीना एवं दिन के रूप में दिया हुआ हो तो 12 महीने को एक वर्ष एवं 30 दिन को एक महीना मानकर गणना करें।
- कर्ज लेने वाला दिन ब्याज गणना में शामिल नहीं करते हैं।
- कर्ज लौटाने वाला दिन ब्याज गणना में शामिल करते हैं।

जब दर (R) तथा समय (T) का आंकिक मान समान हो तब –

$$R \text{ या } T = \sqrt{\frac{100 \times SI}{P}}$$

जब साधारण ब्याज मूलधन का n गुना हो जाए –

$SI = Pn \qquad \frac{P \times R \times T}{100} = Pn$

$\boxed{R \times T = 100 \times n}$

यदि कोई राशि n गुना हो जाती हो या किसी राशि का मिश्रधन मूलधन का n गुना हो जाए–

$A = Pn \quad \Rightarrow \quad P + SI = Pn$

$SI = Pn - P \quad \Rightarrow \quad \frac{P \times R \times T}{100} = P(n-1)$

$\Rightarrow R \times T = (n-1)100$

यदि साधारण ब्याज में कमी या वृद्धि दी गयी हो–

$$P = \frac{\text{ब्याज में कमी/वृद्धि} \times 100}{\text{दर में परिवर्तन} \times \text{समय}}$$

यदि समान वार्षिक किस्तों द्वारा कर्ज का भुगतान किया जाता हो–

$$\text{प्रत्येक किस्त की राशि} = \frac{100 \times A}{100t + rt\left(\frac{t-1}{2}\right)}$$

जहाँ r = दर प्रतिशत, t = समय

आवर्ती जमा योजना के अंतर्गत ब्याज की दर निकालना

उदा. एक व्यक्ति 1000 रु. प्रतिमाह 2 वर्षों तक बैंक में जमा करता है और उसे समय के अंत में 26500 रु. प्राप्त होते है तो बताइए आवर्ती जमा योजना के अंतर्गत कितने % की दर से SI प्राप्त होता है ?

हल जमा राशि = 24 × 1000 = 24000

SI = 26500 – 24000 = 2500

अत:

$$\frac{1000 \times R \times \frac{1}{12}}{100} + \frac{2000 \times R \times \frac{1}{12}}{100} + \ldots + \frac{24000 \times R \times \frac{1}{12}}{100} = 2500$$

$$R \times \frac{10}{12}(1+2+3\ldots\ldots+24) = 2500$$

$$\Rightarrow R = \frac{250}{25} = 10\%$$

Trick-

M – II

$$R = \frac{SI \times 2400}{n(n+1) \times \text{जमा राशि}}$$

n = महीनों की संख्या

अभ्यास प्रश्न

मूलधन, दर एवं समय ज्ञात करना

प्रश्नों के हल

उदा.1 5760 रुपये की राशि पर 3 साल बाद 6% की दर से प्राप्त साधारण ब्याज क्या होगा ?

(a) 1036.80 (b) 1063.80
(c) 1336.80 (d) 1666.80

उदा.2 एक व्यक्ति 5000 रुपये 2 साल के लिए 4% प्रति वर्ष साधारण ब्याज पर उधार लेता है। वह तुरंत इसे किसी अन्य व्यक्ति को $6\frac{1}{4}\%$ प्रति वर्ष की दर से उधार देता है। 2 वर्षों के बाद लेनदेन में उसका लाभ ज्ञात कीजिए ?

(a) Rs. 112.50 (b) Rs. 125
(c) Rs. 150 (d) Rs. 167.50

Note:- इस प्रकार के प्रश्नों में दरों के अंतर से मूलधन तथा समय जो पूछा गया है, को गुणा करके 100 का भाग देने पर सीधे उत्तर प्राप्त होता है।

$$\frac{P\times(R_2-R_1)T}{100} \quad \begin{cases} R_2 = \text{दूसरी दर} \\ R_1 = \text{पहली दर} \end{cases}$$

जब ब्याज मूलधन का x/y हो जाए

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किसी धन का साधारण ब्याज उस धन के $\frac{1}{16}$ वें हिस्से के बराबर है तथा वार्षिक ब्याज की दर वर्षों की संख्या के बराबर है तो दर प्रतिशत प्रति वर्ष ज्ञात करें ?

उदा.2 एक धन साधारण ब्याज की एक निश्चित दर से 5 वर्षों में अपने आप का $\frac{8}{5}$ गुना हो जाता है। प्रतिशत दर प्रतिवर्ष ज्ञात करें ?

उदा.3 यदि 6 वर्ष का साधारण ब्याज मूलधन के 30% के बराबर हो, तो यह मूलधन के बाद के बराबर होगा ?

(a) 10 years (b) 20 years
(c) 22 years (d) 30 years

जब ब्याज की दर या समय अलग–अलग हो

प्रश्नों के हल

उदा.1 10,000 की राशि को आंशिक रूप से 10% और आंशिक रूप से 20% पर उधार दिया गया। 3 वर्षो के बाद प्राप्त साधारण ब्याज 4,500 रु. है। 20% पर उधार दी गई राशि ज्ञात कीजिये ?

(a) 4000 (b) 5000
(c) 6000 (d) 4500

उदा.2 एक व्यक्ति ने एक बैंक में एक समान साधारण ब्याज दर पर रु. 500, 4 वर्षों के लिए ओर रु. 600, 3 वर्शों के लिए जमा किए। उसे कुल रु. 190 की राशि, ब्याज के रूप में मिली। तद्नुसार, साधारण ब्याज की वार्षिक दर कितनी थी ?

(a) 4% (b) 5%
(c) 2% (d) 3%

हल (b)

जब धन t वर्ष में n गुना हो जाए

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक धनराशि साधारण ब्याज की दर से 10 वर्षों में स्वयं की तीन गुना हो जाती है। प्रतिवर्ष ब्याज की दर क्या है ?

(a) 25% (b) 20%
(c) 15% (d) 30%

उदा.2 एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर 7 वर्षों में दोगुनी हो जाती है। कितने वर्षों में समान ब्याज दर से वही राशि अपनी 4 गुना हो जाएगी ?

(a) 10 वर्ष (b) 14 वर्ष
(c) 21 वर्ष (d) 28 वर्ष

साधारण ब्याज में कमी/वृद्धि पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक निश्चित जमा पर ब्याज 4.5% प्रति वर्ष। रुपये है। एक साल में 202.50 A उसी जमा पर 5% प्रति वर्ष की दर से एक वर्ष में कितना अतिरिक्त ब्याज लगेगा ?

(a) 20.25 rs. (b) 22.50 rs.
(c) 25 rs. (d) 42.75 rs.

हल (b)

उदा.2 एक धनराशि को साधारण ब्याज पर एक निश्चित दर पर 3 वर्ष के लिए उधार दिया गया था। अगर इसे 2.5% प्रति वर्ष उच्च दर पर उधार दिया गया होता, तो इसे रु. 540 और अधिक धन प्राप्त होता उधार दिया हुआ पैसा था।

(a) Rs. 6400 (b) Rs. 6472

(c) Rs. 6840 (d) Rs. 7200

हल (d)

किस्तो पर आधारित प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 3 वर्ष बाद देय राशि 1092 बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाना है, यदि साधारण ब्याज की दर 12% वार्षिक हो तो प्रत्येक किस्त का मान ज्ञात कीजिए ?

उदा.2 5 वर्ष बाद देय 3600 रु. के ऋण को बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाना है, यदि ब्याज की दर 10% वार्षिक हो तो प्रत्येक किस्त कितने रुपये की है ?

एक मूलधन का साधारण ब्याज, दूसरे मूलधन के साधारण ब्याज के बराबर हो

प्रश्नों के हल

उदा.1 1500 रु. की कोई धनराशि दो भागों में इस प्रकार उधार दी जाती है कि एक भाग पर 10% वार्षिक ब्याज की दर से 5 वर्षों का साधारण ब्याज, दूसरे भाग पर 12.5% वार्षिक ब्याज की दर से 4 वर्षों के साधारण ब्याज के बराबर है। 12.5% पर उधार दी गई धनराशि हैं–

(a) 500 रु. (b) 100 रु.

(c) 750 रु. (d) 1250 रु.

उदा.2 2600 रु. को दो भागों में साधारण ब्याज पर उधार दिया गया। यदि पहले भाग पर 10% वार्षिक ब्याज की दर से 5 वर्ष का ब्याज, दूसरे भाग पर 9% वार्षिक ब्याज की दर से 6 वर्ष के ब्याज के बराबर हो तो 10% वार्षिक ब्याज दर पर कितना धन दिया गया ?

(a) 1150 रु. (b) 1250 रु.

(c) 1350 रु. (d) 1450 रु.

हल (c)

उदा.3 मोहन 800 रु. को दो असमान भागों में बाँटकर बैंक A तथा बैंक B में जमा करता है। बैंक A की ब्याज दर 10% वार्षिक तथा समय 8 वर्ष है। बैंक B की ब्याज दर 12% एवं समय 10 वर्ष है। यदि दोनों बैंकों से समान–समान ब्याज प्राप्त होता है तो 10% ब्याज पर कितना धन लगाया गया था ?

(a) 480 रु. (b) 360 रु.

(c) 400 रु. (d) 500 रु.

हल (a)

जब प्रत्येक भाग का मिश्रधन बराबर हो जाये

प्रश्नों के हल

उदा.1 2186 रु. को तीन भागों में इस प्रकार बाँटा गया कि इनके मिश्रधन क्रमशः 1, 2 एवं 3 वर्षों में समान होते है, यदि प्रत्येक दशा में ब्याज की दर 4% वार्षिक हो तो सबसे कम धन कितना होगा ?

(a) 756 रु. (b) 597 रु.

(c) 702 रु. (d) 1093 रु.

हल (c)

उदा.2 एक व्यक्ति ने 25300 रु. अपने तीन पुत्रों A, B, C में इस प्रकार वितरित किये कि 10% साधारण ब्याज की वार्षिक दर से क्रमशः 2 वर्ष, 3 वर्ष तथा 4 वर्ष बाद उनके मिश्रधन समान होंगे। A का भाग कितना है ?

(a) 7800 रु. (b) 8400 रु.

(c) 9100 रु. (d) इनमें से कोई नहीं

हल (c)

जब दो अलग–अलग वर्षों का मिश्रधन ज्ञात हो

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक निश्चित राशि की राशि रु 2 साल में 1008 और रु 1164 3 1/2 वर्षों में। राशि और ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

3 CHAPTER करणी व घातांक (Surds and Indices)

करणी

वे राशियाँ जिनका मूल मान ठीक–ठीक नहीं निकाला जा सके, उसे करणी कहते है।

- यदि a एक परिमेय संख्या है तथा m एक धन पूर्णांक है, तो a का m वाँ मूल या $a^{\frac{1}{m}}$ या $\sqrt[m]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होगी, यहाँ पर $\sqrt[m]{a}$ एक करणी है।

  जैसे – $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादि ।
- करणी के अनेक रूप है जैसे – $\sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[5]{\ }$ ....
- $a^{\frac{1}{m}}$ को m वाँ घात युक्त करणी कहा जाता है ।

करणियों के प्रकार

शुद्ध करणी	मिश्र करणी	सजातीय करणी	संयुग्मी करणी
वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड हो तो ऐसी करणी को शुद्ध करणी कहते हैं।	वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड के अलावा कोई भी एक परिमेय संख्या मौजूद हो। जैसे :– $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{8}$, $2\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी करणिया जिसमें उनके अपरिमेय गुणनखण्ड एक समान हो। जैसे :– $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी दो पद वाली दो करणिया जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते है। जैसे :– $\left(2+\sqrt{8}\right)$ व $\left(2-\sqrt{8}\right)$, $\left(2+\sqrt{5}\right)$ व $\left(2-\sqrt{5}\right)$

जब पूरी राशि करणीगत हो

- यदि करणी में लिखी संख्या के दो क्रमागत गुणनखण्ड न हो सके तो पूरी राशि को x के बराबर मानकर दोनों पक्षो का वर्ग करके द्विघात समीकरण रूप ($ax^2 + bx + c = 0$) में बदलेंगे।
- तब श्री धराचार्य सूत्र से $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

करणियों में संक्रियाएँ

(1) करणी का योग व अंतर

केवल सजातीय करणियों को ही आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है।

उदा. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

हल $\sqrt{25\times3} + \sqrt{16\times3}$

$= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= 9\sqrt{3}$

उदा. $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

हल $\sqrt{9\times3} - \sqrt{4\times3}$

$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

(2) करणी का गुणा–भाग

करणियों का गुणा भाग तभी संभव है जब उनकी घातें समान हो।

उदा. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{4}$

हल $\sqrt[3]{2\times5\times4}$

$= \sqrt[3]{40}$

उदा. $12\times4^{\frac{1}{3}}$ में $3\sqrt{2}$ से भाग दो ।

हल $\dfrac{12\times4^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\times4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4\times4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}$

$= 4\times\left[\dfrac{4^2}{2^3}\right]^{\frac{1}{6}} \quad = 4\times\left[\dfrac{16}{8}\right]^{\frac{1}{6}}$

$= 4\times2^{\frac{1}{6}}$

करणियों के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$

(2) $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a^2\times b} = a\sqrt{b}$

(4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

(5) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}$

(6) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(7) $\sqrt{2} = 1.41421$

(8) $\sqrt{3} = 1.73205$

(9) $\sqrt{5} = 2.23607$

(10) $\sqrt{6} = 2.44949$

संयुग्मी

- ऐसी दो पद वाली करणी जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते हैं तो ऐसी करणियों को संयुग्मी करणी कहते हैं।
- इस प्रकार की राशियों का मान ज्ञात करने के लिए हर की संयुग्मी से अंश व हर दोनों से गुणा करते है।

उदा. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$

$= \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}$

$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$

$= 2-\sqrt{3}$

करणियों की तुलना (बडा या छोटा)

- दिये गये करणियों में से सबसे बड़ा या छोटा निकालने के लिए हम घातांक को समान करते है तथा आधार की तुलना करते है।

उदा. $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

हल $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ की घातें 3, 2, 3 है जिनका LCM = 6 हैं।

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

$\sqrt{4} = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64}$

$\sqrt[3]{6^2} = \sqrt[6]{36}$

अतः सबसे बड़ी संख्या $= \sqrt[6]{64} = \sqrt{4}$

घातांक – किसी संख्या को उसी से जितनी बार गुणा करते है उतने को उस संख्या की घात कहते है और उस संख्या को आधार कहते है।

घातांक के कुछ महत्वपूर्ण नियम

(i) $a^m = a \times a \times a \times ....$ m बार

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$

(iv) $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

(v) $[(a^m)^n]^l = a^{mnl}$

(vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(vii) $a^\circ = 1$ {किसी भी संख्या की घात शून्य हो तो, उस पूरी राशि का मान 1 होता है।}

(viii) $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$

(ix) $a^m = b^n$

$a = (b)^{n/m}$ or $b = (a)^{m/n}$

(x) $a^m = b$ तो $a = b^{1/m}$

- यदि Power भिन्न रूप में हो तो बड़ा या छोटा value निकालना हो घात के हर का ल.स.प. लेंगे और ल.स.प. से प्रत्येक घात को गुणा करेंगे और जिसकी बड़ी value आयेगी वह बड़ा होगा और जिसकी छोटी value आएगी वह छोटा होगा।

उदा. $(2)^{\frac{1}{4}}, (3)^{\frac{1}{6}}, (4)^{\frac{1}{8}}, (8)^{\frac{1}{12}}$

हल $(2)^{\frac{1}{4}\times 24} = 2^6 = 64$

$(3)^{\frac{1}{6}\times 24} = 3^4 = 81$

$(4)^{\frac{1}{8}\times 24} = 4^3 = 64$

$(8)^{\frac{1}{12}\times 24} = 8^2 = 64$

अतः $3^{\frac{1}{6}}$ बड़ा है (नोट – यहाँ 4, 6, 8, 12 का ल.स.प. 24 है।)

अभ्यास प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{214+\sqrt{107+\sqrt{196}}}$ का मान है।

(a) 23 (b) 15

(c) 24 (d) 18

उत्तर– (b)

उदा.2 निम्न का मान क्या होगा ?

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots....}}}$

(a) 5 (b) 3

(c) 2 (d) 30

उत्तर– (b)

उदा.3 निम्न का मान ज्ञात करो ?

$$\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$$

(a) 2 (b) 4
(c) ±2 (d) -2

उत्तर– (c)

उदा.4 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ का मान होगा ?

(a) $2\sqrt{10}$ (b) 0
(c) $2\sqrt{6}$ (d) $2\sqrt{15}$

उत्तर– (b)

उदा.5 $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ का मान क्या है

(a) 1 (b) 0
(c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{7}$

उत्तर– (b)

उदा.6 $\sqrt{2^3\sqrt{4\sqrt{2^3\sqrt{4.........}}}}$ का मान है ?

(a) 2 (b) 2^2
(c) 2^3 (d) 2^5

उत्तर– (a)

उदा.7 $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\sqrt[6]{6}$ मे से सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{3}$
(c) $\sqrt[4]{4}$ (d) $\sqrt[6]{6}$

उत्तर– (b)

उदा.8 निम्नलिखित को अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें (बड़े से छोटा) ।

$\sqrt[3]{4},\sqrt{2},\sqrt[6]{3},\sqrt[4]{5}$

(a) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{3}$
(b) $\sqrt[3]{4}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}$
(c) $\sqrt{2}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}$
(d) $\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}>\sqrt[3]{4}>\sqrt{2}$

उत्तर– (a)

उदा.9 इनमें से सबसे छोटी संख्या है।

$\sqrt[6]{12},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5},\sqrt{3}$

(a) $\sqrt[6]{12}$ (b) $\sqrt[3]{4}$
(c) $\sqrt[4]{5}$ (d) $\sqrt{3}$

उत्तर– (c)

उदा.10 $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$ का वर्गमूल क्या होगा ?

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
(c) $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

उत्तर– (a)

उदा.11 यदि x, y परिमेय संख्याएँ हो और $\frac{5+\sqrt{11}}{3-2\sqrt{11}}=x+y\sqrt{11}$ हो तो x और y का मान होगा ?

(a) $x=\frac{-14}{17},y=\frac{-13}{26}$

(b) $x=\frac{4}{13},y=\frac{11}{17}$

(c) $x=\frac{-27}{25},y=\frac{-11}{37}$

(d) $x=\frac{-37}{35},y=\frac{-13}{35}$

उत्तर– (d)

उदा.12 यदि $\sqrt{50}+\sqrt{128}=\sqrt{N}$ तो N का मान क्या है ?

(a) 26 (b) 390
(c) 338 (d) 182

उत्तर– (c)

उदा.13 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......}}}$ के बराबर है ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$
(c) 2 (d) 3

उत्तर– (c)

उदा.14 जब $\left(4+\sqrt{7}\right)$ को पूर्ण वर्ग के रूप में लिखा जाता है तो वह निम्न में से किसके बराबर होगा ?

(a) $\left(2+\sqrt{7}\right)^2$ (b) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$

(c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}+1\right)\right\}^2$ (c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)^2$

उत्तर– (c)

उदा.15 व्यंजक $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ का मान होगा –

(a) 3 (b) 1
(c) 8 (d) 2

उत्तर– (d)

उदा.16 यदि $\sqrt{7}=2.6457$ और $\sqrt{3}=1.732$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(a) 1.0944 (b) 1.944
(c) 1.009 (d) 1.0844

उत्तर– (a)

उदा.17 यदि $10^{0.48} = X$, $10^{0.70} = y$ और $X^z = y^2$, तो z का लगभग मान होगाः

(a) 1.45 (b) 1.88
(c) 2.9 (d) 3.7

उत्तर– (c)

उदा.18 यदि $5^a = 3125$, तो $5^{(a-3)}$ का मान होगा?

(a) 25 (b) 125
(c) 625 (d) 1625

उत्तर– (a)

उदा.19 $\frac{(243)^{\frac{n}{5}} \times 3^{2n+1}}{g^n \times 3^{n-1}} = ?$

(a) 1 (b) 2
(c) 9 (d) 9^n

उत्तर– (c)

उदा.20 यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$ तब $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ किसके बराबर होगा ?

(a) 0 (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

उत्तर– (a)

उदा.21 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?
3^{50}, 4^{40}, 5^{30} और 6^{20}

(a) 3^{50} (b) 4^{40}
(c) 5^{30} (d) 6^{20}

उत्तर– (b)

उदा.22 निम्न संख्याओं में सबसे छोटा है :
$2^{250}, 3^{150}, 5^{100}, 4^{200}$

(a) 2^{250} (b) 3^{150}
(c) 5^{100} (d) 4^{200}

उत्तर– (c)

उदा.23 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौन सी है ?
$\frac{4}{9}, \sqrt{\frac{9}{49}}, 0.49, (0.7)^2$

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\sqrt{\frac{9}{49}}$
(c) 0.47 (d) $(0.7)^2$

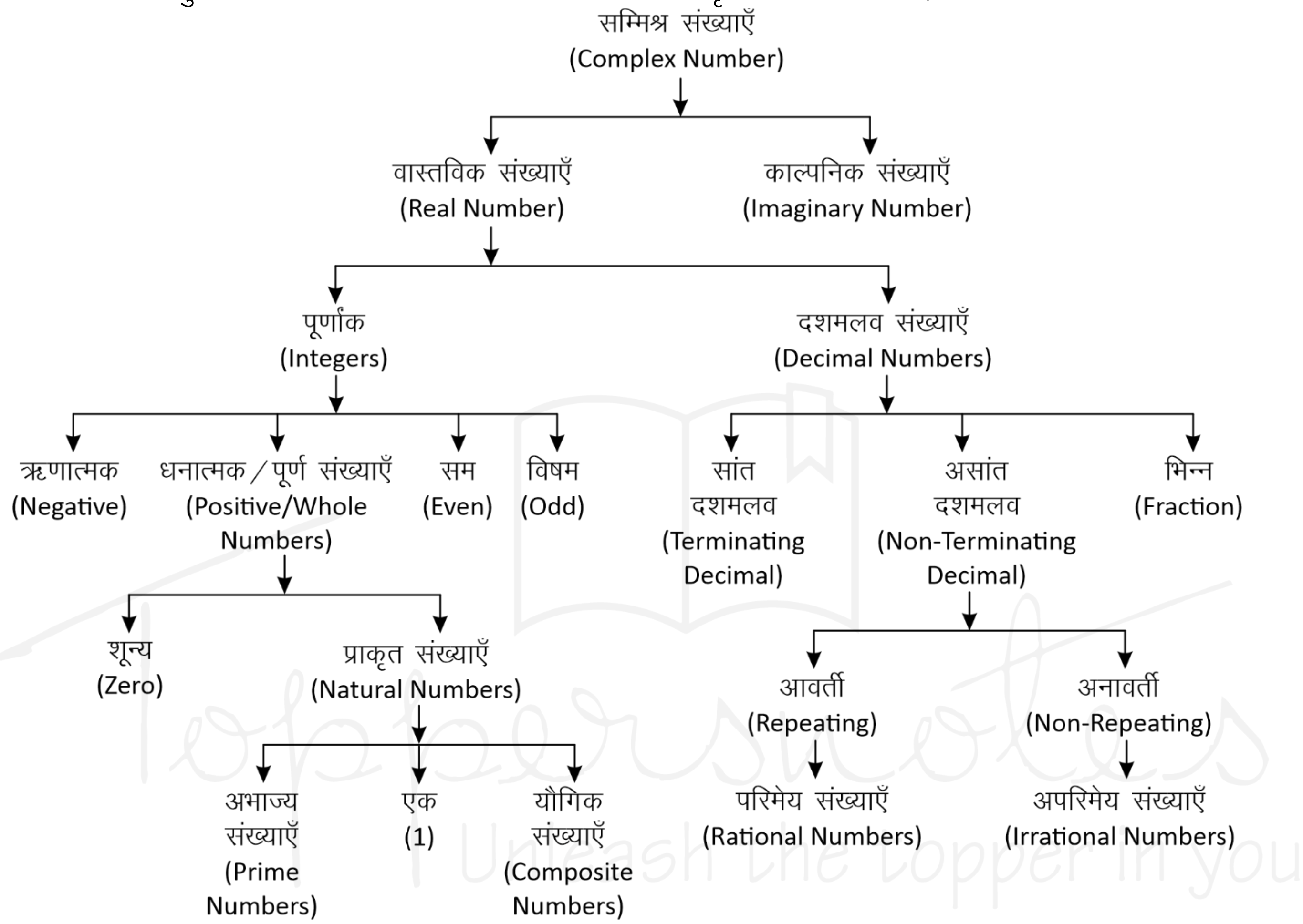
उत्तर– (d)

4 CHAPTER

संख्या पद्धति (Number System)

संख्या पद्धति :– किसी भी यौगिक राशि के परिणामों का बोध कराने के लिए जिस पद्धति का उपयोग होता है, संख्या पद्धति कहलाती है।

संख्याओं को उनके गुणों और विशेषताओं के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है –



सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)

वे सभी संख्याएँ जो वास्तविक और काल्पनिक संख्याओं से मिलकर बनी होती है।

इन्हें (a + ib) के रूप में लिखा जाता है। जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ है तथा $i = \sqrt{-1}$ है।

$\boxed{Z = a \text{ (वास्तविक संख्या)} + ib \text{ (काल्पनिक संख्या)}}$

1. वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers): परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

I. पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ–साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती है, इसे **I** से सूचित करते हैं।

I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

(i) धनात्मक / पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते है, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती है।

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

नोट : चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

A. प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते है।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है ।

उदाहरण –

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

(a) अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) :- एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह संख्या स्वयं, उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}

- तीन अंको की सबसे छोटी अभाज्य संख्या = 101
- तीन अंको की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या = 997

जहाँ 1 Prime Number नहीं है।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

☞ **अभाज्य संख्याओं का परीक्षण :–** दी गयी संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। माना यह संख्या x है, अब x से छोटी समस्त अभाज्य संख्याओं की सहायता से दी गयी संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए।

- यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक अभाज्य संख्या होगी।

उदाहरण –

क्या 349 एक अभाज्य संख्या है या नहीं ?

हल –

349 का संभावित वर्गमूल 19 होगा और 19 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 है।

स्पष्ट है कि 349 इन सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्य नहीं है अतः 349 भी एक अभाज्य संख्या है।

सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)

HCF = 1

(b) यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers) :- वे प्राकृत संख्याएँ जो 1 या स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से भी विभाज्य हो, यौगिक संख्याएँ कहलाती है।

जैसे – 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

(ii) सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है।

n वां पद = 2n

प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

(iii) विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती है।

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}\right\}$

II. दशमलव

दशमलव वे संख्याएँ है जो दो पूर्ण संख्याओं या पूर्णांको के बीच आती है। जैसे – 3.5 एक दशमलव संख्या है जो 3 व 4 के बीच स्थित है।

- प्रत्येक दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक भिन्न को भी दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

(i) सांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

(ii) असांत दशमलव

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक।

जैसे – 0.3333, 0.7777, 0.183183183...........

ये दो प्रकार के हो सकते हैं –

A. आवर्ती दशमलव भिन्न (Repeating)

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

जैसे – $\frac{1}{3} = 0.333...,\frac{22}{7} = 3.14285714.....$

- ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं।

इसे बार बोलते है।

$0.333..... = 0.\overline{3}$

$\frac{22}{7} = 3.14285714.... = 3.14\overline{2857}$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.\overline{P} = \frac{P}{9}$ $\quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$ $\quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.p\overline{q} = \frac{pq - p}{90}$ $\quad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$

$0.p\overline{qr} = \frac{pqr - p}{990}$ $\quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs - pq}{9900}$

उदाहरण –

(i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625 - 6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524 - 35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

- **परिमेय (Rational) संख्याएँ** – वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

उदाहरण –

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

B. अनावर्ती (Non-Repeating)

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती।

जैसे – $\pi = 3.1415926535897932...$

$\sqrt{2} = 1.41421356237...$

- **अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ** – इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण –

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}......$

भिन्न (Fraction) :- भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण चीज का कोई भाग निरूपित करती है।
जैसे एक सेब के चार भाग किये जाते है, उसमें से एक हिस्सा निकाल दिया गया तो उसे $\frac{1}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। जबकि शेष बचे भाग को $\frac{3}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जायेगा।
भिन्न दो भागों में बंटा होता है – अंश व हर

माना कोई भिन्न $= \frac{p \rightarrow \text{अंश}}{q \rightarrow \text{हर}}$

भिन्नों के प्रकार

भिन्न

साधारण भिन्न, जिसमें अंश, हर से पूर्णतः विभाजित नहीं होता
उदा. – $\frac{5}{6}$

- **उचित भिन्न: अंश का मान हर की अपेक्षा कम होता है।**
  जैसे – $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{11}$
- **अनुचित भिन्न: अंश का मान, हर की अपेक्षा अधिक होता है।**
  जैसे – $\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{23}{15}$
- **मिश्रित भिन्न – जो एक पूर्णांक व एक भिन्न से मिलकर बनी हो।**
  जैसे – $6\frac{3}{4}, 2\frac{3}{5}$

दशमलव भिन्न: जिसमें हर के रूप में 10 अथवा 10 की कोई घात होती है।
उदा. – $\frac{45}{100}$

- **साधारण आवृत दशमलव भिन्न –जिनमें दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले सभी अंको की पुनरावृत्ति हो**
  जैसे – $\frac{10}{3} = 2.8333...$
- **मिश्रित आवृत दशमलव भिन्न – जिनमें दशमलव बिन्दु के 1 या 2 अंको के बाद अंको की पुनरावृत्ति हो।**
  जैसे – $\frac{17}{6} = 2.8333$

2. **काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Numbers)**: जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

परफेक्ट संख्या (Perfect Number)

वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण –

$6 \rightarrow 1, 2, 3 \rightarrow$ यहाँ $1 + 2 + 3 \rightarrow 6$

$28 \rightarrow 1, 2, 4, 7, 14 \rightarrow 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \rightarrow 28$

पूर्णवर्ग संख्या की पहचान

↓

इकाई अंक जो एक पूर्ण वर्ग संख्या के हो सकते है।	जो नहीं हो सकते
• 0	2 ——
• 1	3 ——
• 4	7 ——
• 5 or 25	8 ——
• 6	
• 9	

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

<u>**नोट**</u> – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवष्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

1. **Decimal संख्या को Binary में बदलना :**
   किसी डेसीमल (दस–आधारी) संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त डेसीमल (दस–आधारी) संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते है जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।
   अब सभी शेषफल को उल्टे क्रम में लिखा जाए तो परिवर्तित बाइनरी संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण –

$2 \times 44 = 88$; $89 - 88 = 1$	89
$2 \times 22 = 44$; $44 - 44 = 0$	44
$2 \times 11 = 22$; $22 - 22 = 0$	22
$2 \times 5 = 10$; $11 - 10 = 1$	11
$2 \times 2 = 4$; $5 - 4 = 1$	5
$2 \times 1 = 2$; $2 - 2 = 0$	2
	1

अतः 89 के समतुल्य **Binary number = $(1011001)_2$**

2. **Binary को Decimal में बदलना :**
   Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाई ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण –

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

अब

$(1011001)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \times 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} = 89$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण –

2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल –

$2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या $= (3+1)(1+1)(1+1)(1+1)$

$= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. **जब संख्या घात (Power) के रूप में हो**
   जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा।
   जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना षेश प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः विभाजित हो जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।

2. **सरलीकरण के रूप में हो**
   प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो
   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा।
2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

n विषम होने पर भाजक → (a–b)

n सम होने पर भाजक → $(a-b)$ या $(a+b)$ या दोनों।

(i) $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

(ii) $a^n \div (a+1) \begin{cases} \text{यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा} \\ \text{यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा} \end{cases}$

(iii) $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा

(iv) $(a^n + a) \div (a+1) \begin{cases} \text{यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा।} \\ \text{यदि n विषम हो, तो शेषफल } (a-1) \text{ होगा।} \end{cases}$

रोमन पद्धति के संकेतक

1	→	I	20	→	XX
2	→	II	30	→	XXX
3	→	III	40	→	XL
4	→	IV	50	→	L
5	→	V	100	→	C
6	→	VI	500	→	D
7	→	VII	1000	→	M
8	→	VIII			
9	→	IX			
10	→	X			

विभाज्यता के नियम

संख्या	नियम
2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	यदि दी गयी संख्या के इकाई अंक का दुगुना बाकी संख्या (इकाई का अंक छोड़कर) से घटाने पर प्राप्त संख्या 7 से विभाजित है तो पूरी संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी। अथवा किसी संख्या में अंको की संख्या 6 के गुणज में हो तो संख्या 7 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	किसी संख्या में एक ही अंक 6 बार दोहराए या अन्तिम अंक को 4 से गुणा करके शेष संख्या (इकाई अंक छोड़कर) में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 17784