



हरियाणा

P.G.T.

हरियाणा लोक सेवा आयोग (HPSC)

Mathematics

Volume - 1



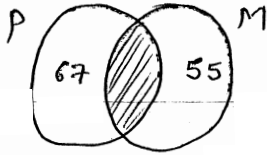
विषय सूची

| क्र.सं. | अध्याय | पृष्ठ सं. |
|---------------------------------------|--|-----------|
| भाग - I (सीनियर सेकेंडरी लेवल) | | |
| 1. | समुच्चय, संबंध एवं फलन <ul style="list-style-type: none">समुच्चय और उनके प्रकारसमुच्चय के मूल गुणसंबंधफलन | 1 |
| 2. | सीमा, सातत्य और अवकलनीयता <ul style="list-style-type: none">सीमासातत्यअवकलनीयता | 66 |
| 3. | सम्मिश्र व सदिश बीजगणित <ul style="list-style-type: none">सम्मिश्र संख्याएँसम्मिश्र संख्याओं का बीजगणितसम्मिश्र संख्याओं का ध्रुवीय निरूपणसम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूलसदिश और अदिशसदिशों के प्रकारसदिश बीजगणितदो सदिशों का अदिश गुणनफलदो सदिशों का सदिश गुणनफलअदिश त्रिगुणफल | 107 |
| 4. | अवकल गणित <ul style="list-style-type: none">सीमाएँ और सीमाओं का बीजगणितव्युत्पन्नफलनों के व्युत्पन्नों का बीजगणितबहुपद और त्रिकोणमितीय फलनों के व्युत्पन्नअंतर्निहित और स्पष्ट फलन के व्युत्पन्नद्वितीय क्रम व्युत्पन्नबढ़ते और घटते फलनप्रश्न हल सहित | 121 |
| 5. | समाकलन गणित <ul style="list-style-type: none">समाकलन के सूत्रप्रतिस्थापन विधि द्वारा फलनों का समाकलननिश्चित समाकलनकुछ महत्वपूर्ण समाकलन | 135 |

| | | |
|-----|---|------------|
| 6. | अवकल समीकरण <ul style="list-style-type: none">• अवकल समीकरण का क्रम• अवकल समीकरण की सीमा• प्रथम क्रम और प्रथम डिग्री के अवकल समीकरण का हल | 170 |
| 7. | क्रमचय और संयोजन <ul style="list-style-type: none">• गुणन का मूल सिद्धांत• क्रमचय• संयोजन• धनात्मक पूर्णाकों के लिए द्विपद प्रमेय• द्विपद विस्तार में सामान्य और मध्य पद | 182 |
| 8. | मैट्रिक्स <ul style="list-style-type: none">• मैट्रिक्स के प्रकार• मैट्रिसेस पर ऑपरेशन• व्युत्क्रमणीय मैट्रिसेस | 192 |
| 9. | द्विविमीय ज्यामिति <ul style="list-style-type: none">• सरल रेखा• वृत्त• परवलय• दीर्घवृत्त और अतिपरवलय | 212 |
| 10. | व्युत्पन्नोँ और समाकलनों का अनुप्रयोग <ul style="list-style-type: none">• स्पर्शरेखा और सामान्य• अधिकतम और न्यूनतम• सरल वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल और सरल वक्रों के बीच का क्षेत्रफल | 277 |
| 11. | सांख्यिकी <ul style="list-style-type: none">• माध्य, बहुलक, माधिका• परिक्षेपण के माप (सीमा, माध्य विचलन विचरण और मानक विचलन)• संभाव्यता और उनके प्राथमिक नियम• सशर्त प्रायिकता | 295 |

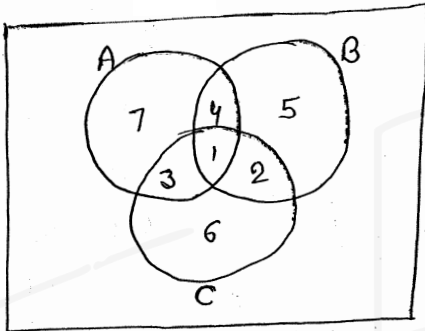
समुच्चय, संबंध एवं फलन

Q.19)



$$p(\text{केवल } P) = 100 - p(M) \\ = 100 - 55 = 45$$

Universal Set \Rightarrow



$$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(i) $n(\text{केवल } A) =$ क्षेत्र 7

(ii) $n(\text{only } B) = 5$

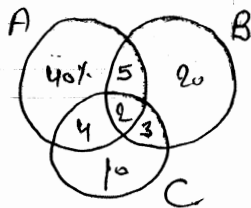
(iii) $n(\text{only } C) = 6$

(iv) $n(\text{ठीक एक समुच्चय में विद्यमान अवयव}) = 5 + 6 + 7$

(v) $n(\text{ठीक दो समुच्चय में विद्यमान अवयव}) = 3 + 2 + 4$

Q.14)

+

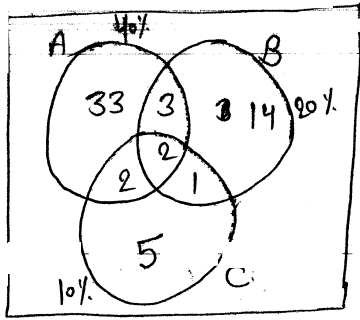


only A समाचार पत्र वाले परिवारों सं. = $10000 \times$

$$= 4000 -$$

$$= 8$$

$$\frac{10000 \times 5}{100} = 500, \frac{10000 \times 20}{100} = 2000, \frac{10000 \times 4}{100} = 400$$



- A: 40
- B: 20
- C: 10
- AB: 5
- BC: 3
- CA: 4
- ABC: 2

(i) $n(\text{केवल अक्षर A पढ़ने वाले परिवार}) = 33$
 $[40 - (3+2+1)] = 33 \quad \frac{1000 \times 33}{100}$

(ii) $n(\text{ठीक एक अक्षर पढ़ने वाले}) = 52$
 $\Rightarrow [33 + 14 + 5 = 52] \quad \frac{1000 \times 52}{100} = 520$

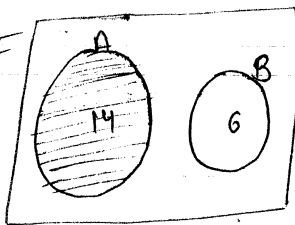
(iii) $n(\text{ठीक 2 अक्षर पढ़ने वाले}) = 60$
 (क्षेत्र $3+2+1 = 6$) $\frac{1000 \times 6}{100} = 60$

(iv) $n(\text{कम से कम एक अक्षर पढ़ने वाले}) = 600$
 $\frac{1000 \times 60}{100} = 600$
 $\frac{40 + 33 + 14 + 10 - 3 - 2 - 1 - 2 - 1 - 1 + 2}{100} = 600$

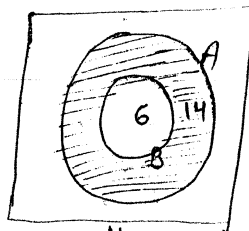
(v) $n(\text{अक्षर न पढ़ने वाले}) = 1000 - 600 = 400$
 या 40%

Q) if $n(A) = 14$, $n(B) = 6$, $n(A \cup B) = x$ & $n(A \cap B) = y$
 हो then x व y के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करो ?

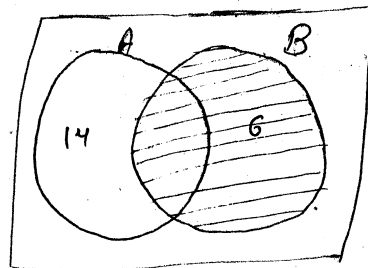
Solⁿ



$A \cap B = \phi$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
 कि पर हों



$A \cup B = A$ व $A \cap B = B$
 इसमें सबसे कम element है



x का न्यूनतम मान $\Rightarrow n(A) = 14$

x का अधिकतम मान $\Rightarrow n(A) + n(B) = 14 + 6 = 20$

अतः x का संभव रूप $\Rightarrow \boxed{14 \leq x \leq 20}$

$$\boxed{\max\{n(A), n(B)\} \leq n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)}$$

जब $A \cap B = \phi$ तब $n(A \cap B) = 0$

$\therefore y$ का न्यूनतम मान $= 0$

y का अधिकतम मान $= 6$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq y \leq 6}$$

अतः संभव रूप \Rightarrow

$$\boxed{0 \leq n(A \cap B) \leq \min\{n(A), n(B)\}}$$

Q. 11.) Let given Set A व B हैं।

| | A | B |
|--------|-------|-------|
| अवयव | m | n |
| उपसमूह | 2^m | 2^n |

$$\therefore 2^m - 2^n = 56$$

Now by option $\Rightarrow 2^6 - 2^3 = 56$

समुच्चय (Sets)

समुच्चय \rightarrow वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं।

\rightarrow समुच्चय में संग्रहित वस्तुएँ उसके सदस्य या तत्व कहलाते हैं।

\rightarrow यदि a समुच्चय A का सदस्य है, तो इसे प्रतीकात्मक रूप से $a \in A$ लिखते हैं (a belongs to A)। यदि b समुच्चय A का सदस्य नहीं है तो इसे $b \notin A$ लिखते हैं (b not belongs to A)।

संकेतन (Notation): समुच्चयों को मुख्यतः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े

अक्षरों से निरूपित किया जाता है।

जैसे - A, B, X आदि

N - प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

Z - पूर्णाकों का समुच्चय

Z^+ - धन पूर्णाकों का समुच्चय

Z^- - ऋण पूर्णाकों का समुच्चय

R - वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

C \rightarrow सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

Q \rightarrow परिमेय संख्याओं का समुच्चय

समुच्चय का निरूपण

1. रोलर/सारणीबद्ध

→ सभी अवयवों को Comma द्वारा पृथक करते हुए बिना पुनरावृत्ति के $\{ \}$ के अन्दर लिखते हैं।

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

यहाँ $3 \in A$ परन्तु $4 \notin A$

2. निर्माण रूप

→ इसमें हमसे कोष्ठ " $\{ \}$ " के अन्दर अवयवों को सूचीबद्ध करने के बजाय उनके गुणधर्म लिखते हैं।

$$N = \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है}\}$$

$$Z = \{x : x \text{ एक पूर्णांक है}\}$$

समुच्चय के प्रकार !:

(1) एकल समुच्चय :- जिसमें ~~अवयव~~ केवल एक अवयव हो।

जैसे. $A = \{2\}$

$$B = \{ \}$$

$\{0\}$, एक एकल समुच्चय है।

(2) रिक्त समुच्चय :- वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं है।

जैसे $\{ \}$ या $\{ \}$ से प्रदर्शित करते हैं।

जैसे $\{x : x \in N, 9 < x < 10\} = \{ \}$

$$\{x : x \in R, x^2 = -8\} = \{ \}$$

(3) परिमित व अपरिमित समुच्चय! वृहत् समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित हो, ~~वृहत्~~ परिमित समुच्चय ~~क~~ और निश्चित नहीं हो उसे अपरिमित समुच्चय कहलाता है।

जैसे- $A = \{a, e, i, o, u\}$ → परिमित
 $B = \{1, 2, 3, \dots\}$ → अपरिमित

(4) समान समुच्चय! यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A में हो तो वे समान समुच्चय कहलाते हैं।

जैसे: $A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{e, i, o, u, a\}$ $\Rightarrow A = B$

$$A = \{p, q, r\}$$

$$B = \{q, p, r\}$$

$$C = \{r, q, p\}$$

$$\text{अतः } A = B = C$$

(5) उपसमुच्चय! ^(super-set) यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का भी अवयव है, तो समुच्चय B, ~~समुच्चय~~ समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। $B \subseteq A$ से निरूपित किया जाता है।
 जैसे ~~समुच्चय~~ $B \subseteq A$ से निरूपित किया जाता है।

जैसे: $A = \{3, 4, 5, 6\}$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

अतः $B \subseteq A$, B, A का एक उपसमुच्चय है।

(6) उचित उपसमुच्चय (proper subset) व अधिसमुच्चय (superset)

→ यदि A और B के समुच्चय हैं तथा $A \subset B$ एवं $A \neq B$ तो A, B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है और B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है।

जैसे:- $A = \{3, 4, 5\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

A, B का ~~उचित उपसमुच्चय~~ उचित उप समुच्चय है।

B, A का अधिसमुच्चय है।

(7) सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set) :- जब विचाराधीन सभी समुच्चय

किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय होते हैं तो उस

समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय कहते हैं।

जैसे:- यदि $A = \{1, 2, 4\}$

$B = \{2, 2, 4, 6\}$

$C = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ तब

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

यहां U सार्वत्रिक ~~समुच्चय~~ समुच्चय है जिसे A, B व C उपसमुच्चय हैं।

(8) घात समुच्चय :- किसी समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं। A के घात समुच्चय को $P(A)$ से निरूपित करते हैं।

→ घात समुच्चय कभी -भी रिक्त नहीं होगा।

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ तो उपसमुच्चय $P(A)$ की संख्या $= 2^n$

यहां $P(A) = \{ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$

समुच्चयों पर संक्रियाएँ :-

(1) संघ या सम्मिलन (Union) :- समुच्चय A तथा समुच्चय B का संघ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी अवयवों को सम्मिलित रूप से लेकर बनाया जाता है।

$$\text{यदि } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ तथा}$$

$$B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$\text{तब } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$$

→ A Union B पढ़ते हैं इसे।

(2) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection) :- समुच्चय A तथा समुच्चय B का सर्वनिष्ठ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी उभयनिष्ठ अवयव उपस्थित हैं।

$$\text{यदि } A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$B = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$A \cap B = \{6, 12, 18\}$$

→ इसे A intersection B पढ़ते हैं।

(3) समुच्चयों का अन्तर :- समुच्चय A का समुच्चय B से अन्तर, उन अवयवों का समुच्चय है जो ~~समुच्चय~~ समुच्चय A में हैं किन्तु समुच्चय B में नहीं।

$$\text{यदि } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$B - A = \{8, 10\}$$

(4) पूरक समुच्चय :- किसी समुच्चय का पूरक समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय के अवयवों में से उस समुच्चय के अवयवों को हटाने पर प्राप्त समुच्चय को कहते हैं।

यदि $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

$A = \{2\}$

$A' = U - A = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

o समुच्चयों के बीजगणितीय नियम :-

(1) Idempotent Laws :- किसी भी समुच्चय A के लिए-

(i) $A \cup A = A$

(ii) $A \cap A = A$

(2) Identity Laws :- किसी भी समुच्चय A के लिए-

(i) $A \cup \phi = A$

(ii) $A \cap U = A$

(3) Commutative Law :- किसी दो समुच्चयों A व B के लिए-

(i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A$

(4) Associative Laws :- यदि A, B व C तीन समुच्चय हों-

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(5) Distributive Law: यदि A, B व C तीन कोई समुच्चय हों तब

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(6) De-Morgan's Law यदि A व B कोई दो समुच्चय हों तब

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

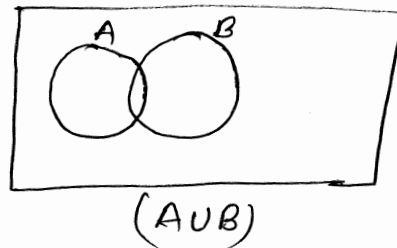
(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Venn आरेख द्वारा समुच्चयों का प्रदर्शन :- सार्वत्रिक समुच्चय को एक बड़े आयत से दर्शाते हैं तथा अन्य समुच्चयों को उस आयत के अन्दर वृत्तों से, तथा यदि दो समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ है तो उन द्वारा प्रदर्शित वृत्तों को, प्रतिच्छेदी वृत्तों से दर्शाते हैं।

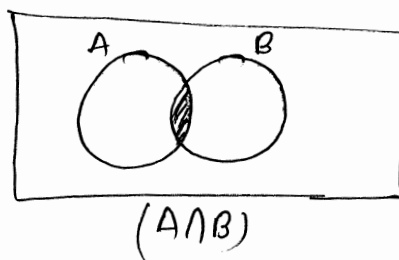
उदा. यदि U सार्वत्रिक समुच्चय, A तथा B कोई दो समुच्चय हों, तो वेन आरेख द्वारा निम्न समुच्चय को प्रदर्शित कीजिए-

(i) $(A \cup B)'$ ~~$(A \cap B)'$~~ (ii) $(A \cap B)$

सल: (i) $(A \cup B)$



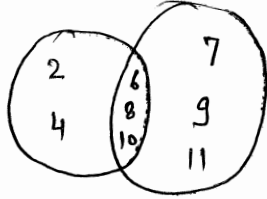
(ii) $(A \cap B)$



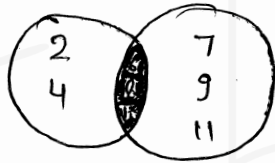
उदा० यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ हैं तो $A \cup B$ तथा $A \cap B$ के Venn आरेख होंगे।

समा०

(i) $A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$



(ii) $A \cap B = \{6, 8, 10\}$



२ का न्यूनतम मान $\Rightarrow n(A) = 14$

२ का अधिकतम मान $\Rightarrow n(A) + n(B) = 14 + 6$

\Rightarrow $14 \leq x \leq 20$
 $= 20$

$$\max\{n(A), n(B)\} \leq n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$$

जब $A \cap B = \phi$ तब $n(A \cap B) = 0$

\therefore μ का न्यूनतम मान $= 0$

μ का अधिकतम मान $= 6$

\Rightarrow $0 \leq \mu \leq 6$

संयोजक रूप से \Rightarrow

$$0 \leq n(A \cap B) \leq \min\{n(A), n(B)\}$$

Q. 11.) Let given Set A व B हैं।

| | | |
|--------|-------|-------|
| | A | B |
| अवयव | m | n |
| उपसमूह | 2^m | 2^n |

$\therefore 2^m - 2^n = 56$

Now by option $\Rightarrow 2^6 - 2^3 = 56$

सम्बन्ध \Rightarrow

Q.) यदि $A = \{a, b, c\}$ व $B = \{1, 2, 3\}$ हैं then बताइये निम्न में से कौन से A से B में सम्बन्ध हैं-

जहाँ $R_1 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}$

जहाँ $R_2 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

- (iii) $R_3 = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$ $\therefore (b, b) \notin A \times B$
 (iv) $R_4 = A \times B$
 (v) $R_5 = \emptyset$

\Rightarrow सम्बन्ध $A \times B$, समुच्चय A से B पर साक्षात्क सम्बन्ध
 $\neq \emptyset$ A से B पर रिक्त सम्बन्ध कहलाता है।

Q.) यदि $A = \{a, b, c\}$ व $B = \{1, 2\}$ हैं then A
 से B पर परिभाषित सम्बन्धों की सं. = ?

Sol. \Rightarrow

$$\therefore n(A \times B) = 3 \times 2 = 6$$

$\therefore A \times B$ का प्रत्येक उपसमुच्चय A से B में एक
 सम्बन्ध होता है। $\therefore 6$ अवयवों वाले समुच्चय A
 उपसमुच्चयों की सं. 2^6 होती है। $\therefore A$ से B पर
 परिभाषित सम्बन्धों की सं. 2^6 अर्थात् 64 होगी।

$\therefore A$ से B में परिभाषित अरिक्त सम्बन्धों की सं.
 $2^6 - 1$ अर्थात् 63 होगी।

Q.) सम्बन्ध $R: N \rightarrow N$ में नियम $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$
 द्वारा परिभाषित है। सम्बन्ध R का क्रमित युग्मों
 के समुच्चय के रूप में लिखो।

\therefore given सम्बन्ध -

$$xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$$

$$x=1 \text{ पर } \rightarrow y = \frac{9}{2} \notin N$$

$$x=2 \text{ पर } \rightarrow y = 4 \in N, 2R4$$

$$x=3 \text{ पर } \rightarrow y = \frac{7}{2} \notin N$$

$$x=4 \text{ पर } \rightarrow y = 3 \in N, 4R3$$

$$x=6 \text{ पर } \rightarrow y = 2 \in N, 6R2$$

$$x=8 \text{ पर } \rightarrow y = 1 \in N, 8R1$$

$$\therefore R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$$

सम्बन्ध के प्रान्त व परिसर \Rightarrow

यदि R , A व B में एक सम्बन्ध है,
 then (i) R का प्रान्त = $\{a : (a,b) \in R\}$
 (ii) R का परिसर = $\{b : (a,b) \in R\}$

Ex:-

given सम्बन्ध -

$R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ में नियम $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x+2y=10$

प्रान्त = $\{2, 4, 6, 8\}$

~~परिसर~~ = $\therefore R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$

परिसर = $\{4, 3, 2, 1\}$

Q.66)

given $R = \{(x,y) : x+2y=8\} \in \mathbb{N}$

$x=1$ पर $\Rightarrow y = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$

$x=2$ पर $\Rightarrow y=3 \in \mathbb{N}$, $2R3$

$x=4$ पर $\Rightarrow y=2 \in \mathbb{N}$, $4R2$

$x=6$ पर $\Rightarrow y=1 \in \mathbb{N}$, $6R1$

$R = \{(2,3), (4,2), (6,1)\}$

अतः प्रान्त = $\{2, 4, 6\}$

परिसर = $\{3, 2, 1\}$

प्रतिलोम सम्बन्ध \Rightarrow यदि $R: A \rightarrow B$ में एक सम्बन्ध है
 तब इसका प्रतिलोम सम्बन्ध

$R^{-1}: B \rightarrow A$ में निम्न प्रकार दिया जाता है-

$$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$$

$$\Rightarrow \boxed{R^{-1} \text{ का प्रान्त} = R \text{ का परिसर}}$$

Q \mathbb{R}^{-1} का परिचर = \mathbb{R} का प्रान्त

Ex:- सम्बन्ध $R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$x R y \Leftrightarrow x + 2y = 8$$

$R = \{(2,3), (4,2), (6,1)\}$ का प्रतिलोम सम्बन्ध $R^{-1} = \{(3,2), (2,4), (1,6)\}$

प्रान्त of $R^{-1} = (3, 2, 1)$

परिचर of $R^{-1} = (2, 4, 6)$

स्वतुल्यता का Ex:-

① माना L_1 एक तल में स्थित रेखाओं का set है। then set R , जहाँ $[L_1, R, L_2] \Leftrightarrow L_1 \parallel L_2$

\Rightarrow यह स्वतुल्य होगा।
 \Rightarrow तत्समक नहीं है।

② Let T एक तल में स्थित बिन्दुओं का समुह है तब सम्बन्ध $R: T \rightarrow T$, $\Delta_1 R \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2$

\Rightarrow यह स्वतुल्य सम्बन्ध होगा के समरूप है।
 \Rightarrow तत्समक नहीं होगा।

③ सम्बन्ध $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का समुह है। जहाँ $x \phi y \Leftrightarrow x = y$

अतः यह स्वतुल्य होगा।

तथा तत्समक भी होगा।

\Downarrow
 प्रत्येक वा. सं. only स्वयं के ही equal होते हैं।

$\Rightarrow A = \{a, b, c\}$

$\therefore \phi$ में कोई element नहीं है। अतः ϕ जा तो तत्समक होगा & ना ही स्वतुल्य होगा।