Toppersnotes®
Unleash the topper in you

REET

राजस्थान शिक्षक पात्रता परीक्षा

Board of Secondary Education, Rajasthan (RBSE)

भाग - 5

Level - II (विज्ञान वर्ग)

गणित

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

विषयसूची

1 CHAPTER

करणी व घातांक (Surds and Indices)

करणी

वे राशियाँ जिनका मूल मान ठीक–ठीक नहीं निकाला जा सके, उसे करणी कहते है।

- यदि a एक परिमेय संख्या है तथा m एक धन पूर्णांक है, तो a का m वाँ मूल या $a^{\frac{1}{m}}$ या $\sqrt[m]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होगी, यहाँ पर $\sqrt[m]{a}$ एक करणी है।
  जैसे – $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादि ।
- करणी के अनेक रूप है जैसे – $\sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[5]{\ }$....
- $a^{\frac{1}{m}}$ को m वाँ घात युक्त करणी कहा जाता है ।

करणियों के प्रकार

शुद्ध करणी	मिश्र करणी	सजातीय करणी	संयुग्मी करणी
वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड हो तो ऐसी करणी को शुद्ध करणी कहते हैं।	वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड के अलावा कोई भी एक परिमेय संख्या मौजूद हो। जैसे :– $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{8}$, $2\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी करणिया जिसमें उनके अपरिमेय गुणनखण्ड एक समान हो। जैसे :– $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी दो पद वाली दो करणिया जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते है। जैसे :– $(2+\sqrt{8})$ व $(2-\sqrt{8})$, $(2+\sqrt{5})$ व $(2-\sqrt{5})$

जब पूरी राशि करणीगत हो

- यदि करणी में लिखी संख्या के दो क्रमागत गुणनखण्ड न हो सके तो पूरी राशि को x के बराबर मानकर दोनों पक्षो का वर्ग करके द्विघात समीकरण रूप ($ax^2 + bx + c = 0$) में बदलेंगे।
- तब श्री धराचार्य सूत्र से $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

करणियों में संक्रियाएँ

(1) करणी का योग व अंतर

केवल सजातीय करणियों को ही आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है।

उदा. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

हल $\sqrt{25\times3} + \sqrt{16\times3}$
$= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$
$= 9\sqrt{3}$

उदा. $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

हल $\sqrt{9\times3} - \sqrt{4\times3}$
$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
$= \sqrt{3}$

(2) करणी का गुणा–भाग

करणियों का गुणा भाग तभी संभव है जब उनकी घातें समान हो।

उदा. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{4}$

हल $\sqrt[3]{2\times5\times4}$
$= \sqrt[3]{40}$

उदा. $12\times4^{\frac{1}{3}}$ में $3\sqrt{2}$ से भाग दो ।

हल $\dfrac{12\times4^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\times4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4\times4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}$

$= 4\times\left[\dfrac{4^2}{2^3}\right]^{\frac{1}{6}} \quad = 4\times\left[\dfrac{16}{8}\right]^{\frac{1}{6}}$

$= 4\times2^{\frac{1}{6}}$

करणियों के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$

(2) $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a^2\times b} = a\sqrt{b}$

(4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

(5) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}$

(6) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(7) $\sqrt{2} = 1.41421$

(8) $\sqrt{3} = 1.73205$

(9) $\sqrt{5} = 2.23607$

(10) $\sqrt{6} = 2.44949$

संयुग्मी

- ऐसी दो पद वाली करणी जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते हैं तो ऐसी करणियों को संयुग्मी करणी कहते हैं।
- इस प्रकार की राशियों का मान ज्ञात करने के लिए हर की संयुग्मी से अंश व हर दोनों से गुणा करते है।

उदा. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$

$= \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}$

$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2}$

$= 2-\sqrt{3}$

करणियों की तुलना (बडा या छोटा)

- दिये गये करणियों में से सबसे बड़ा या छोटा निकालने के लिए हम घातांक को समान करते है तथा आधार की तुलना करते है।

उदा. $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ **में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?**

हल $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ की घातें 3, 2, 3 है जिनका LCM = 6 हैं।

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

$\sqrt{4} = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64}$

$\sqrt[3]{6^2} = \sqrt[6]{36}$

अतः सबसे बड़ी संख्या $= \sqrt[6]{64} = \sqrt{4}$

घातांक – किसी संख्या को उसी से जितनी बार गुणा करते है उतने को उस संख्या की घात कहते है और उस संख्या को आधार कहते है।

घातांक के कुछ महत्वपूर्ण नियम

(i) $a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots.. m$ बार

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$

(iv) $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

(v) $[(a^m)^n]^l = a^{mnl}$

(vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(vii) $a^\circ = 1$ {किसी भी संख्या की घात शून्य हो तो, उस पूरी राशि का मान 1 होता है।}

(viii) $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$

(ix) $a^m = b^n$

$a = (b)^{n/m}$ or $b = (a)^{m/n}$

(x) $a^m = b$ तो $a = b^{1/m}$

- यदि Power भिन्न रूप में हो तो बड़ा या छोटा value निकालना हो घात के हर का ल.स.प. लेंगे और ल.स.प. से प्रत्येक घात को गुणा करेंगे और जिसकी बड़ी value आयेगी वह बड़ा होगा और जिसकी छोटी value आएगी वह छोटा होगा।

उदा. $(2)^{\frac{1}{4}}, (3)^{\frac{1}{6}}, (4)^{\frac{1}{8}}, (8)^{\frac{1}{12}}$

हल $(2)^{\frac{1}{4}\times 24} = 2^6 = 64$

$(3)^{\frac{1}{6}\times 24} = 3^4 = 81$

$(4)^{\frac{1}{8}\times 24} = 4^3 = 64$

$(8)^{\frac{1}{12}\times 24} = 8^2 = 64$

अतः $3^{\frac{1}{6}}$ बड़ा है (नोट – यहाँ 4, 6, 8, 12 का ल.स.प. 24 है।)

अभ्यास प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{214+\sqrt{107+\sqrt{196}}}$ का मान है।

(a) 23 (b) 15
(c) 24 (d) 18

उत्तर– (b)

उदा.2 निम्न का मान क्या होगा ?

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\ldots}}}$

(a) 5 (b) 3
(c) 2 (d) 30

उत्तर– (b)

उदा.3 निम्न का मान ज्ञात करो ?

$$\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$$

(a) 2 (b) 4

(c) ±2 (d) -2

उत्तर– (c)

उदा.4 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ का मान होगा ?

(a) $2\sqrt{10}$ (b) 0

(c) $2\sqrt{6}$ (d) $2\sqrt{15}$

उत्तर– (b)

उदा.5 $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ का मान क्या है

(a) 1 (b) 0

(c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{7}$

उत्तर– (b)

उदा.6 $\sqrt{2^3\sqrt{4\sqrt{2^3\sqrt{4.........}}}}$ का मान है ?

(a) 2 (b) 2^2

(c) 2^3 (d) 2^5

उत्तर– (a)

उदा.7 $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\sqrt[6]{6}$ मे से सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{3}$

(c) $\sqrt[4]{4}$ (d) $\sqrt[6]{6}$

उत्तर– (b)

उदा.8 निम्नलिखित को अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें (बड़े से छोटा) ।

$\sqrt[3]{4},\sqrt{2},\sqrt[6]{3},\sqrt[4]{5}$

(a) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{3}$

(b) $\sqrt[3]{4}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}$

(c) $\sqrt{2}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}$

(d) $\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}>\sqrt[3]{4}>\sqrt{2}$

उत्तर– (a)

उदा.9 इनमें से सबसे छोटी संख्या है।

$\sqrt[6]{12},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5},\sqrt{3}$

(a) $\sqrt[6]{12}$ (b) $\sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{5}$ (d) $\sqrt{3}$

उत्तर– (c)

उदा.10 $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$ का वर्गमूल क्या होगा ?

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

उत्तर– (a)

उदा.11 यदि x, y परिमेय संख्याएँ हो और $\frac{5+\sqrt{11}}{3-2\sqrt{11}}=x+y\sqrt{11}$ हो तो x और y का मान होगा ?

(a) $x=\frac{-14}{17},y=\frac{-13}{26}$

(b) $x=\frac{4}{13},y=\frac{11}{17}$

(c) $x=\frac{-27}{25},y=\frac{-11}{37}$

(d) $x=\frac{-37}{35},y=\frac{-13}{35}$

उत्तर– (d)

उदा.12 यदि $\sqrt{50}+\sqrt{128}=\sqrt{N}$ तो N का मान क्या है ?

(a) 26 (b) 390

(c) 338 (d) 182

उत्तर– (c)

उदा.13 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......}}}$ के बराबर है ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$

(c) 2 (d) 3

उत्तर– (c)

उदा.14 जब $\left(4+\sqrt{7}\right)$ को पूर्ण वर्ग के रूप में लिखा जाता है तो वह निम्न में से किसके बराबर होगा ?

(a) $\left(2+\sqrt{7}\right)^2$ (b) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$

(c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}+1\right)\right\}^2$ (c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)^2$

उत्तर– (c)

उदा.15 व्यंजक $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ का मान होगा –

(a) 3 (b) 1

(c) 8 (d) 2

उत्तर– (d)

उदा.16 यदि $\sqrt{7}=2.6457$ और $\sqrt{3}=1.732$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(a) 1.0944 (b) 1.944
(c) 1.009 (d) 1.0844

उत्तर– (a)

उदा.17 यदि $10^{0.48} = X$, $10^{0.70} = y$ और $X^z = y^2$, तो z का लगभग मान होगाः

(a) 1.45 (b) 1.88
(c) 2.9 (d) 3.7

उत्तर– (c)

उदा.18 यदि $5^a = 3125$, तो $5^{(a-3)}$ का मान होगा?

(a) 25 (b) 125
(c) 625 (d) 1625

उत्तर– (a)

उदा.19 $\frac{(243)^{\frac{n}{5}} \times 3^{2n+1}}{g^n \times 3^{n-1}} = ?$

(a) 1 (b) 2
(c) 9 (d) 9^n

उत्तर– (c)

उदा.20 यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$ तब $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ किसके बराबर होगा ?

(a) 0 (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

उत्तर– (a)

उदा.21 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?
3^{50}, 4^{40}, 5^{30} और 6^{20}

(a) 3^{50} (b) 4^{40}
(c) 5^{30} (d) 6^{20}

उत्तर– (b)

उदा.22 निम्न संख्याओं में सबसे छोटा है :
2^{250}, 3^{150}, 5^{100}, 4^{200}

(a) 2^{250} (b) 3^{150}
(c) 5^{100} (d) 4^{200}

उत्तर– (c)

उदा.23 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौन सी है ?
$\frac{4}{9},\sqrt{\frac{9}{49}},0.49,(0.7)^2$

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\sqrt{\frac{9}{49}}$
(c) 0.47 (d) $(0.7)^2$

उत्तर– (d)

2 CHAPTER

बीजगणित (Algebra)

चर राशियाँ (Variable) – वे राशियाँ जिसका मान स्थिर न होकर बदलता रहता है, चर राशियाँ कहलाती है। शब्द 'चर' का अर्थ है कि वह राशि जो परिवर्तित (Vary) होती रहती है।
चर राशियों को प्रतीक चिन्ह अथवा संकेत द्वारा प्रदर्शित किया जाता हे।
जैसे – x, y, z, a, b, c आदि।

अचर राशियाँ (Constant) – जिन राशियों का मान स्थिर होता है वह अचर राशियाँ कहलाती है।
जैसे – अंकगणित संख्याएँ 0, 1, 2, 3.................

समान तथा असमान पद (Like and Unlike Terms)
– सजातीय पद – वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड समान हों, समान पद अथवा सजातीय पद कहलाते है। इसमें चर तथा उनकी घात समान होती है केवल उनका संख्यात्मक मान भिन्न होता है।
जैसे – $5y^2$ व $25y^2$
जैसे – $3xy - 5x^2 + 4xy + 3x^2 - 4x$ में $3xy$ तथा $4xy$ समान पद और $-5x^2$ तथा $3x^2$ समान पद है।

विजातीय पद – वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड असमान हो, असमान पद अथवा विजातीय पद कहलाते हैं इनमें चर तथा उनकी घार असमान होती है।
जैसे – $3xy$ तथा $-5x^2$ असमान पद।

गुणांक (Coefficient) – पद का कोई भी गुणनखण्ड, पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है। किसी बीजीय पद को उसके गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। इसका संख्यात्मक गुणनखण्ड, संख्यात्मक गुणांक अथवा अचर गुणांक कहलाता है।
$4x^2y$ में x^2 का गुणांक $= 4y$
$4x^2y$ में x^2y का अचर गुणांक $= 4$

बहुपद
$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2$ .... a_nx^n
जहाँ a_0, a_1, a_2, a_n = वास्तविक संख्या है।

- Variable (चर) x की power (घात) हमेशा धनात्मक होगी।
- **कोटि (Degree)** – अधिकतम घात (बहुपद में Variable की) ही कोटि होगी।
  उदाहरण
  $x^2 + x^3 + 1$, यहाँ कोटि 3 होगी।
  समघातीय व्यंजक की घात–
  $ab + ac + ca$
  'a' या 'b' 'ab' यहां Degree- 2 होगी।
- Degree गुणा में जुडती है तथा भाग में घटती है।
- जोडने व घटाने पर पदों की Degree में फर्क नहीं पडता।

नोट – प्रश्न में पद की जो घात है, उत्तर में भी पद की वही घात रहेगी।

बहुपद के प्रकार

पदो के आधार पर

(1) एकपदी बहुपद – जिसमें केवल एक पद हो।
जैसे – $5x^2y^2, 3x$

(2) द्विपदी बहुपद – जिसमें केवल दो पद हो।
जैसे – $7x^2+5y$

(3) त्रिपदी बहुपद – जिसमें केवल तीन पद हो।
जैसे – $4x^2+7xy+3y^2$

घात के आधार पर

(1) रैखिक बहुपद – जिस बहुपद के चर x की घात 1 है, उसे रैखिक या एक घातीय बहुपर कहते हैं।
जैसे – $4x+2$

(2) द्विघात बहुपद – जिस बहुपद के चर x का उच्चतम मान 2 है।
जैसे – x^2+x+2

(3) त्रिघात बहुपद – जिस बहुपद के चर x की उच्चतम घात 3 हो उसे त्रिघात बहुपद कहते है।
जैसे – ax^3+bx^2+cx+d

(4) शून्य बहुपद – जिसके सभी गुणांक शून्य हो।
जैसे – $2x^0, 5, 19$ आदि।

बहुपद के शून्यक (Zeroes of Polynomial) – जब किसी बहुपद का मान चर के किसी मान के लिए शून्य हो जाता है तो चर का मान बहुपद का शून्यक कहलाता है।

जैसे – बहुपद p(x) = 2x + 1 में $x=-\frac{1}{2}$ रखने पर

$$p\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-1+1=0$$

अतः $-\frac{1}{2}$, p(x) का एक शून्यक है।

जैसे – $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f(1) = (1)^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

अतः 1 बहुपद f(x) का शून्यक है।

बहुपद f(x) के शून्यकों की अधिकतम संख्या, बहुपद की घात के बराबर होती है किन्तु यह आवश्यक नहीं कि बहुपद के सभी शून्यक वास्तविक हो –

जैसे – $f(x) = x^2 + x + 1$ का कोई वास्तविक शून्यक नहीं

$f(x) = x^2 + 9$ का कोई वास्तविक शून्यक नहीं

द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)

1. द्विघात समीकरण – जिस समीकरण में चर राशि का अधिकतम मान 2 हो उसे द्विघात समीकरण कहते है। एक बीजगणितीय व्यंजक जो इस प्रकार है : $ax^2 + bx + c = 0$

   जहाँ $a \neq 0$, $b, c \in R$ को द्विघात समीकरण कहते हैं।

द्विघात समीकरण के गुणनखंड की शर्ते

a) दिया हुआ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx\ c = 0$ है जहाँ a, b व c वास्तविक संख्याएँ है।

b) यदि $b^2 - 4ac > 0$ इस स्थिति में गुणनखण्ड निकाले जा सकते है।

c) यदि $b^2 - 4ac < 0$, इस स्थिति में गुणनखण्ड नहीं हो सकते है।

द्विघात समीकरण के मूल (Roots of Quadratic Equation)

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल α [वास्तविक या समिश्र (जटिल)] इस प्रकार है कि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, तब $(x - \alpha)$, $ax^2 + bx + c$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

मूलों का योग व गुणनफल

मूलों का योग व गुणनफल – माना दो मूल α, β हैं तब

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ और } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

मूलों का योग $=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

मूलों का गुणनफल $=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

तो, $ax^2 + bx + c = 0$ को हम लिख सकते हैं –

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\left(\frac{-b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

- यदि मूल α व β एक–दूसरे के व्युत्क्रम है तो $a = c$
- यदि α व β का मान आपस में बराबर तथा चिन्ह विपरीत है, तो $b = 0$
- यदि a, b व c परिमेय संख्याएँ है तथा $a+\sqrt{b}$ द्विघात समीकरण का एक मूल है, तो दूसरा मूल इसके संयुग्मी $a-\sqrt{b}$ तथा विपरीत होगा।

उदा. 1 द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए यदि एक मूल $3+\sqrt{3}$ है ?

व्याख्या यदि एक मूल $3+\sqrt{3}$ है, तो इसका दूसरा मूल $3-\sqrt{3}$ होगा।

मूलों का योग $=\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)=6$

मूलों का गुणनफल $=\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=6$

सूत्र प्रयोग से

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलो की प्रकृति का निर्धारण, D (Determinant) द्वारा किया जाता है ।

जहाँ $D = b^2 - 4ac$ द्वारा निकाला जाता है ।

(i) यदि $D = 0$ (मूल वास्तविक एवं समान)

(ii) यदि $D > 0$ (मूल वास्तविक एवं असमान)

(iii) यदि $D < 0$ (मूल काल्पनिक)

<u>शेषफल प्रमेय</u> – यदि f(x) एक कोई बहुपद है जहाँ $n \geq 1$ तथा a कोई वास्तविक संख्या है। जब f(x) को (x – a) से विभाजित किया जाता है तो f(a) शेषफल आता है। (n यहाँ डिग्री है)

1. यदि f(x) को (x + a) से विभाजित किया जाता है तो शेष होगा = f(–a)
2. यदि f(x) को (ax + b) से विभाजित किया जाता है तो शेष बचेगा = $f\left(-\frac{b}{a}\right)$
3. यदि f(x) को (ax – b) से विभाजित किया जाता है तो शेष $= f\left(\frac{b}{a}\right)$

उदा.1 भाग की क्रिया का इस्तेमाल किए बिना $(x^3 + 4x^2 + 6x - 2) \div (x + 5)$ का शेष ज्ञात कीजिए ?

हल $x + 5 = 0$

$x = -5$ अतः शेष f(-5) होगा

अब

$x^3 + 4x^2 + 6x - 2$ में मान रखने पर

$(-5)^3 + 4(-5)^2 + 6(-5) - 2$

$-125 + 100 - 30 - 2 = -57$

<u>गुणनखण्ड प्रमेय</u> – माना f(x) एक बहुपद है एवं a एक वास्तविक संख्या है तब –

(i) यदि f(a) = 0 तो (x-a), f(x) का एक गुणनखण्ड होगा ।

(ii) यदि (x–a), f(x) का एक गुणनखण्ड है तो f(a) = 0

उदा.2 यदि $f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ तो क्या (x – 2) एवं (x – 3), f(x) के गुणनखण्ड है ?

हल (i) f(a) = 0

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 2^3 - 12 \times 2^2 + 44 \times 2 - 48$

$= 8 - 48 + 88 - 48$

$= 0$

अतः (x - 2), f(x) का गुणनखण्ड है ।

(ii) f(a) = 0

$x - 3 = 0$

x = 3 रखने पर

$f(3) = 3^3 - 12 \times 3^2 + 44 \times 3 - 48$

$= 27 - 108 + 132 - 48$

$f(3) = -13 \neq 0$

अतः (x – 3), f(x) का गुणनखण्ड नहीं है ।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
2. $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$
3. $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,(A+B)$
4. $(A-B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB\,(A-B)$
5. $(A^2 - B^2) = (A+B)(A-B)$
6. $A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB\,(A+B)$
7. $A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB\,(A-B)$
8. $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)\,(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)$
9. $(A+B+C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3\,(B+C)(C+A)(A+B)$
10. $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$
11. $A^2 - B^2 = (A-B)^2 + 2AB$
12. यदि $A + B + C = 0$ हो तो $A^3 + B^3 + C^3 = 3\,ABC$ or A = B = C
13. $x^2 + x(A+B) + AB = (x+A)(x+B)$
14. $A^2(B+C) + B^2(C+A) + C^2(A+B) + 3ABC = (A+B+C)(AB+BC+CA)$
15. $(A+B)\,(B+C)(C+A) = AB\,(A+B) + BC(B+C) + CA(C+A) + 2ABC$
16. $(A-B)\,(B-C)(C-A) = A^2(B-C) + B^2(C-A) + C^2(A-B)$
17. $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,(AB + BC + CA)$

बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ

(1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

(2) यदि $x + \frac{1}{x} = a$

तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$

$x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$

(3) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

(4) यदि $x - \frac{1}{x} = a$

तब $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$

$x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 + 4a^2 + 2$

(5) यदि $a + \frac{1}{a} = 2$

तब $a^n + \frac{1}{a^n} = 2$ (हमेशा)

(6) यदि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ तब a + b + c = 0 तथा a = b = c

(7) यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ तब a = b = c

अभ्यास प्रश्न

1. बहुपद

प्रश्नों के हल

उदा.1 $x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 3x + 2$ को भाजक $x - 1$ से भाग देने पर कितना शेष प्राप्त होगा ?

(a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

उत्तर (c)

उदा.2 जब $f(x) = 12x^3 - 13x - 5x + 7$ में $(3x + 2)$ से भाग दिया जाता है, तो शेषफल क्या होगा ?

(a) 2 (b) 0
(c) -1 (d) 1

उत्तर (d)

उदा.3 यदि $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ है तो $\frac{a+b+c}{c}$ किसके बराबर है ?

(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

उत्तर (c)

उदा.4 बहुपदो $x^4 - 3x + 2$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ और $x^4 - 1$ का म.स. क्या है ?

(a) $x - 1$ (b) $x + 1$
(c) $x^2 - 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (a)

उदा.5 दिये गये बहुपदो का LCM ज्ञात करों ?
$f(x) = 4(x - 1)^2 (x^2 + 6x + 8)$ **व** $g(x) = 10 (x - 1) (x + 2) (x^2 + 7x + 10)$

उत्तर

2. द्विघात समीकरण

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि समीकरण $kx^2 - 6x + 3k = 0$ के मूलों का योगफल तथा गुणनफल तथा गुणनफल बराबर हो, तो $k = ?$

(a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (a)

उदा.2 व्यजंक $x^4 - 2x^2 + k$ एक पूर्ण वर्ग होगा यदि k का मान ?

(a) 1 (b) 0
(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.3 समीकरण $2x^2 - 11x + 15 = 0$ के मूल है ?

(a) $3, \frac{5}{2}$ (b) $5, \frac{3}{2}$
(c) $-3, \frac{-5}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (a)

उदा.4 समीकरण $3 - 7x + 6x^2 = 0$ के मूलों का गुणनफल होगा ?

(a) -2 (b) $\frac{1}{2}$
(c) 2 (d) $-\frac{1}{2}$

उत्तर (b)

उदा.5 दो भिन्न इस प्रकार हैं कि उनका गुणनफल $-\frac{2}{5}$ और योग $\frac{1}{15}$ है । ये दो भिन्न क्या है ?

(a) $\frac{4}{3}, -\frac{3}{10}$ (b) $\frac{2}{7}, -\frac{7}{5}$
(c) $\frac{4}{7}, -\frac{7}{10}$ (d) $\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}$

उत्तर (d)

उदा.6 एक द्विघात समीकरण के मूल $\left(2+\sqrt{5}\right)$ तथा $\left(2-\sqrt{5}\right)$ है, वह समीकरण होगा ?

(a) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (b) $x^2 + 4x - 1 = 0$
(c) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (d) $x^2 + 4x + 1 = 0$

उत्तर (a)

b और c परिमेय मान है) $5+3\sqrt{3}$ है । $(a^2 + b^2 + c^2)/(a + b + c)$ का मान क्या है ?

(a) 35/3 (b) 37/3
(c) -105/11 (d) -105/13

उत्तर (c)

उदा.8 $\left(36-\frac{x^4}{a^2}\right)$ के गुणनखंड होंगे ?

(a) $6\left(x-\frac{x^2}{a}\right)\left(6-+\frac{x^2}{a^2}\right)$

(b) $\left(6+\frac{x^2}{a}\right)\left(6-\frac{x^2}{a}\right)$

(c) $\left(6-\frac{x^2}{a}\right)\left(6+\frac{x^2}{a}\right)$

(d) $\left(6-\frac{x^2}{a}\right)\left(6-\frac{x^2}{a}\right)$

उत्तर (b)

उदा.9 व्यंजक $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}$ का एक गुणज है ?

(a) $4x+\sqrt{3}$ (b) $4x+3$

(c) $4x-3$ (d) $4x-\sqrt{3}$

उत्तर (d)

3. बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि $\sqrt{x}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ है, तो $x^2-16x+6$ का मान क्या होगा ?

(a) 0 (b) -2

(c) 2 (d) 4

उत्तर (c)

उदा.2 यदि $x=3+\sqrt{8}$ है, तो $x^2+\frac{1}{x^2}$ किसके बराबर है ?

(a) 38 (b) 36

(c) 34 (d) 30

उत्तर (c)

उदा.3 यदि x = 997, y = 998 और z = 999 है, तो $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ का मान ज्ञात करें ?

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) 3

उत्तर (d)

उदा.4 यदि p = 999 है, तो $\sqrt[3]{p\left(p^2+3p+3\right)+1}$ का मान क्या होगा ?

(a) 1000 (b) 999

(c) 998 (d) 1002

उत्तर (a)

उदा.5 यदि x + y + z = 1, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ एवं xyz = 1 तो $x^3+y^3+z^3$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(a) –1 (b) 1

(c) –2 (d) 2

उत्तर (b)

उदा.6 यदि $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ है, तो $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$ का मान ज्ञात करें ?

(a) $6\sqrt{3}$ (b) $12\sqrt{3}$

(c) $18\sqrt{3}$ (d) $24\sqrt{3}$

उत्तर (c)

उदा.7 यदि $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ हो तो $4x^2+\frac{4}{x^2}$ का मान कितना होगा ?

(a) 7 (b) –7

(c) 9 (d) –9

उत्तर (c)

उदा.8 यदि $a^4+\frac{1}{a^4}=119$ हो तो $a^3-\frac{1}{a^3}$ का मान

(a) 27 (b) 36

(c) 45 (d) 54

उत्तर (b)

उदा.9 यदि $x+\frac{1}{x}=1$ हो तो $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$ का मान कितना होगा ?

(a) –1 (b) –2

(c) 1 (d) 2

उत्तर (c)

3 CHAPTER समीकरण

परिभाषा – दो व्यंजकों के बीच '=' का चिन्ह लगाकर उनकी समानता व्यक्त की जाए तो वह पद समीकरण कहलाता है।

- **सरल समीकरण** – समीकरण में यदि एक ही चर राशि हो और वह केवल प्रथम घात की भी हो तो उसे सरल समीकरण कहते है।
- अज्ञात राशि अर्थात् चर के जिस मान से कोई समीकरण संतुष्ठ हो जाता है, उसे मूल समीकरण कहते है।
- एक चर राशि वाली रेखीय समीकरण का एक ही मूल होता है। अर्थात् चर राशि का केवल एक मान ही समीकरण को संतुष्ट कर सकता है।
- समीकरण के दो पक्ष होते है। बराबर (=) के चिन्ह के बांयी ओर के पद को वाय पद (LHS) तथा दांयी ओर के पद को दक्षिण पद (RHS) कहते है।
- किसी समीकरण के + चिन्ह वाले पद को दूसरे पक्ष में ले जाने पर वह – चिन्ह हो जाता है और – चिन्ह वाले पद को दूसरे पक्ष में ले जाने पर + चिन्ह का हो जाता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य –

1. तीन क्रमागत संख्याएँ – $x, x+1, x+2$
2. तीन क्रमागत सम संख्याएँ – $x, x+2, x+4$
3. तीन क्रमागत विषम संख्याएँ – $x, x+1, x+3$ आदि।
4. समीकरण को हल करने के लिए दोनों पदों में समान राशि को जोड़ा या घटाया जा सकता है तथा गुणा–भाग भी कर सकते है।
5. समीकरण में अज्ञात राशि की उच्चतम घात को समीकरण की घात कहते है।
6. सरल समीकरण में बांया पक्ष x या अज्ञात राशि के लिए रहता है तथा दांया पख ज्ञात राशि या गिनती के लिए रहता है। पक्षान्तरण में उस पद का चिन्ह बदलकर पक्षान्तरण करते है।

Eg. $\frac{3}{2}x = -54$ **समीकरण को हल कीजिए –**

$3x = -108$

$x = \frac{-108}{3} = -36$

Eg. $\frac{x}{9} = 5$ **को हल कीजिए।**

$\frac{x}{9} = 5$ दोनों पक्षों को 9 से गुणा करने पर

$\frac{x}{9} \times 9 = 5 \times 9$

$x = 45$

Eg. किसी संख्या के दुगुने में 9 जोड़ने पर 77 प्राप्त होता है, वह संख्या ज्ञात कीजिए।

माना वह संख्या x है।

$2x + 9 = 77$

$2x = 77 - 9 = 68$

$x = \frac{68}{2} = 34$

Eg. यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गों का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

(a) 40 (b) 44

(c) 80 (d) 89

<u>हल</u> प्रश्न के अनुसार

$x + y = 22$ .... (i)

$x^2 + y^2 = 404$ .... (ii)

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$(22)^2 = 404 + 2xy$

$484 = 404 + 2xy$

$2xy = 80$

$xy = 40$

Eg. **एक पर्यटक प्रतिदिन उतने ही रूपये खर्च करता है जितने उसके पर्यटन के दिनों की संख्या है । उसका कुल खर्च रू. 361 है, तो ज्ञात करें कि उसका पर्यटन कितने दिनों तक चला ?**

(a) 17 days (b) 19 days

(c) 21 days (d) 31 days

हल (b) माना दिनों की संख्या = x

प्रश्न के अनुसार

$x \times x$ = 361

x^2 = 361

x = 19 days

4 CHAPTER गुणनखण्ड

- किसी संख्या को कई संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने को उस संख्या के गुणनखण्ड कहते है।
- **गुणनखण्ड के प्रकार**

(A) ka + kb + kc प्रकार के गुणनखण्ड

k = उभयनिष्ठ है।

ka + kb + kc = k (a + b+ c)

Eg. $x^2y + xy^2 = xy\ (x + y)$

पदों में $(x + y)$ उभयनिष्ठ है।

(B) ka + kb + pa + pb प्रकार के गुणनखण्ड

इसमें k व p उभयनिष्ठ है।

ka + kb + pa + pb = k (a + b) + p (a + b)

= (a + b) (k + p)

Eg. y^2+by+dy+bd = y (y + b) + d (y + b)

= (y + b) + (y + d)

दोनों पदों में $(x + a)$ उभयनिष्ठ है।

(C) $a^2 + 2ab + b^2$ तथा $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप में

(i) दो व्यंजकों के योग का वर्ग –

Eg. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

अर्थात् (पहले व्यंजक का वर्ग) + 2 x (पहला व्यंजक)

दूसरा व्यंजक + (दूसरे व्यंजक का वर्ग = दो व्यंजकों के योग का वर्ग)

(ii) दो व्यंजकों के अन्तर का वर्ग

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

अर्थात् दो व्यंजकों के अन्तर का वर्ग = (पहले व्यंजक का वर्ग) – 2 x (पहला व्यंजक) x (दूसरा व्यंजक) + दूसरे व्यंजक का वर्ग

(iii) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y)$

$= (x + y)^2$

(iv) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)(x - y)$

$= (x - y)^2$

(D) $a^2 - b^2$ के रूप में व्यंजकों के गुणनखण्ड

Eg. (a + b) (a - b) = $a^2 - b^2$

व्यंजकों के योगफल और अन्तर का गुणनफल = (पहला व्यंजक + दूसरा व्यंजक) (पहला व्यंजक – दूसरा व्यंजक) = (पहला व्यंजक)^2 – (दूसरा व्यंजक)^2

(E) त्रिपद व्यंजक के गुणनखण्ड

- वह व्यंजक जिसमें तीन पद हो तथा किसी पद में चर राशि की अधिकतम घात दो हो, तो ऐसे व्यंजक को द्विघात त्रिपद व्यंजक कहते है।
  व्यापक रूप – $ax^2 + bx + c$ है।

Eg. $xy + xz - 2y - 2z$ के गुणनखण्ड कीजिए।

$x\ (y + z) - 2\ (y + z)$

$(x + z)\ \ (x - z)$

Eg. ($x^2 - xy - 72y^2$) का गुणनखण्ड क्या होगा ?

A. (x – 8y) (x + 9y)

B. (x – 9y) (x + 8y)

C. (x - y) (x + 72y)

D. (x – 6y) (x + 12y)

Ans. $x^2 - 9xy + 8xy - 72y^2$

$= x\ (x - 9y) + 8y\ (x - 9y)$

$= (x + 8y)\ (x - 9y)$

Eg. $(x^2 - 11xy - 60y^2)$ का गुणनखण्ड क्या होगा ?

A. $(x + 15y)(x - 4y)$

B. $(x - 15y)(x + 4y)$

C. $(15x + y)(4x - y)$

D. इनमें से कोई नहीं

Ans. $x^2 - 11xy - 60y^2$

$= x^2 - 15xy + 4xy - 60y^2$

$= x(x - 15y) + 4y(x - 15y)$

$= (x + 4y)(x - 15y)$

5
CHAPTER

वर्ग और वर्गमूल

- किसी संख्या का वर्ग वह संख्या है, जो स्वयं या उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

  Eg. 8 x 8 = 64

  64, 8 का वर्ग है, क्योंकि 8 को 8 से गुणा करेन पर 64 प्राप्त होता है।
- 1, 4, 9, 16, 25……. वर्ग संख्याएँ है, ये पूर्ण वर्ग संख्याएँ कहलाती है।
- दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच में कोई भी संख्या किसी भी संख्या का वर्ग नहीं होती है।

  Eg. दो क्रमागत वर्ग संख्या 4 और 9 के बीच स्थित 4, 6, 7, 8 संख्याएँ किसी भी संख्या का वर्ग नहीं है।
- सभी वर्ग संख्याओं के अन्त में इकाई के स्थान पर 0,1, 4, 5, 6 या 9 होता है।
- यदि एक संख्या के इकाई के स्थान पर 1 या 9 आता है, तब वर्ग संख्या के अंत में 1 आयेगा।
- यदि एक संख्या के इकाई के स्थान पर 4 या 6 आता है, तब वर्ग संख्या के अन्त में 6 आयेगा।
- वर्ग संख्या के अन्त में शुन्यों की संख्या केवल सम होती है।

क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग –

- किसी भी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते है।

  Eg. $5^2 = 25 = 12 + 13, 7^2 = 49 = 24 + 25$
- दो क्रमागत विषम संख्याओं के गुणनफल में एक जोड़ने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

  Eg. 15 x 17 = 255 + 1 = 256

  $$\sqrt{256} = 16$$
- दो क्रमागत सम संख्याओं के गुणनफल में भी 1 जोड़ने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

  Eg. 22 x 24 = 528 + 1 = 529 = $(23)^2$
- **वर्गमूल** – किसी संख्या का वर्गमूल वह है जिसे स्वयं से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है।

  Eg. x के वर्गमूल को $\sqrt{x}$ से गुणा करते है।
- एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल प्राप्त होते है।

  Eg. $3^2 = 9, \sqrt{9} = 3$
- एक पूर्ण संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल प्राप्त होते है।

  Eg. $3^2 = 9, \sqrt{9} = 3$
- एक पूर्ण संख्या में यदि x अंक है तो उसके वर्गमूल में $\frac{x}{2}$ अंक होगें। यदि x सम है या $\frac{x+1}{2}$ अंक होगें, यदि x विषम है।

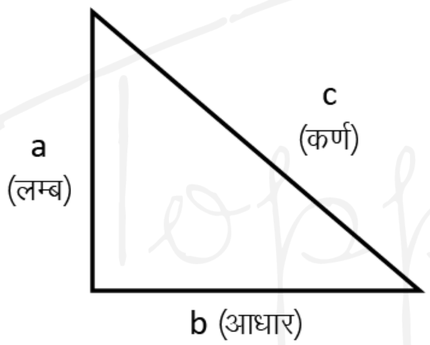
  Eg. निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए ।

  (i) $42 = (40 + 2)^2$
  $$= 40\,(40 + 2) + 2(40 + 2)$$
  $$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$$
  $$= 1600 + 80 + 80 + 4$$
  $$= 1764$$

वर्ग तथा वर्गमूल तालिका

Square	Square Root	Square	Square Root
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$21^2 = 441$	$\sqrt{441} = 21$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$22^2 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$23^2 = 529$	$\sqrt{529} = 23$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$24^2 = 576$	$\sqrt{576} = 24$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$25^2 = 625$	$\sqrt{625} = 25$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$	$26^2 = 676$	$\sqrt{676} = 26$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$	$27^2 = 729$	$\sqrt{729} = 27$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$	$28^2 = 784$	$\sqrt{784} = 28$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$	$29^2 = 841$	$\sqrt{841} = 29$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$	$30^2 = 900$	$\sqrt{900} = 30$

- **पाइथोगोरस प्रमेय** – दो संख्याओं के वर्गों का योग तीसरी संख्या के वर्ग के बराबर होता है।



कर्ण² = लम्ब² + आधार²

लम्ब² = कर्ण² – आधार²

आधार² = कर्ण² – लम्ब²

उदा. 1 **The value of**

$$\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+\sqrt{49}}}}}$$ is

(1) 3 (2) 9

(3) 7 (4) 5

हल $\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+7}}}}$

$= \sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+6}}}$

$= \sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{25}}}$

$= \sqrt{5+\sqrt{11+5}} = \sqrt{5+4}$

$= \sqrt{9} = 3$

उदा. 2 यदि **$(102)^2 = 10404$** है, तो

$\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$ **का मान किसके बराबर है ?**

(a) 0.306 (b) 0.0306

(c) 11.122 (d) 11.322

हल (d) According to the Question.

$= \sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$

$= \sqrt{\frac{10404}{100}} + \sqrt{\frac{10404}{10000}} + \sqrt{\frac{10404}{1000000}}$

$= \frac{102}{10} + \frac{102}{100} + \frac{102}{1000}$

$= 10.2 + 1.02 + 0.102 = 11.322$

उदा. 3 920 में कम से कम क्या जोडें कि योगफल एक पूर्ण वर्ग हो ?

(a)31 (b) 39

(c) 41 (d) 49

हल स्पष्ट है कि $(30)^2 < 920 < (31)^2$ जोडे जानी वाली संख्या $= (31)^2 - 920 = (961-920) = 41$.