Toppersnotes®
Unleash the topper in you

MPPSC

राज्य सिविल सेवाएँ

प्रीलिम्स

मध्य प्रदेश लोक सेवा आयोग

भाग - 7

गणित एवं डेटा इंटरप्रिटेशन

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

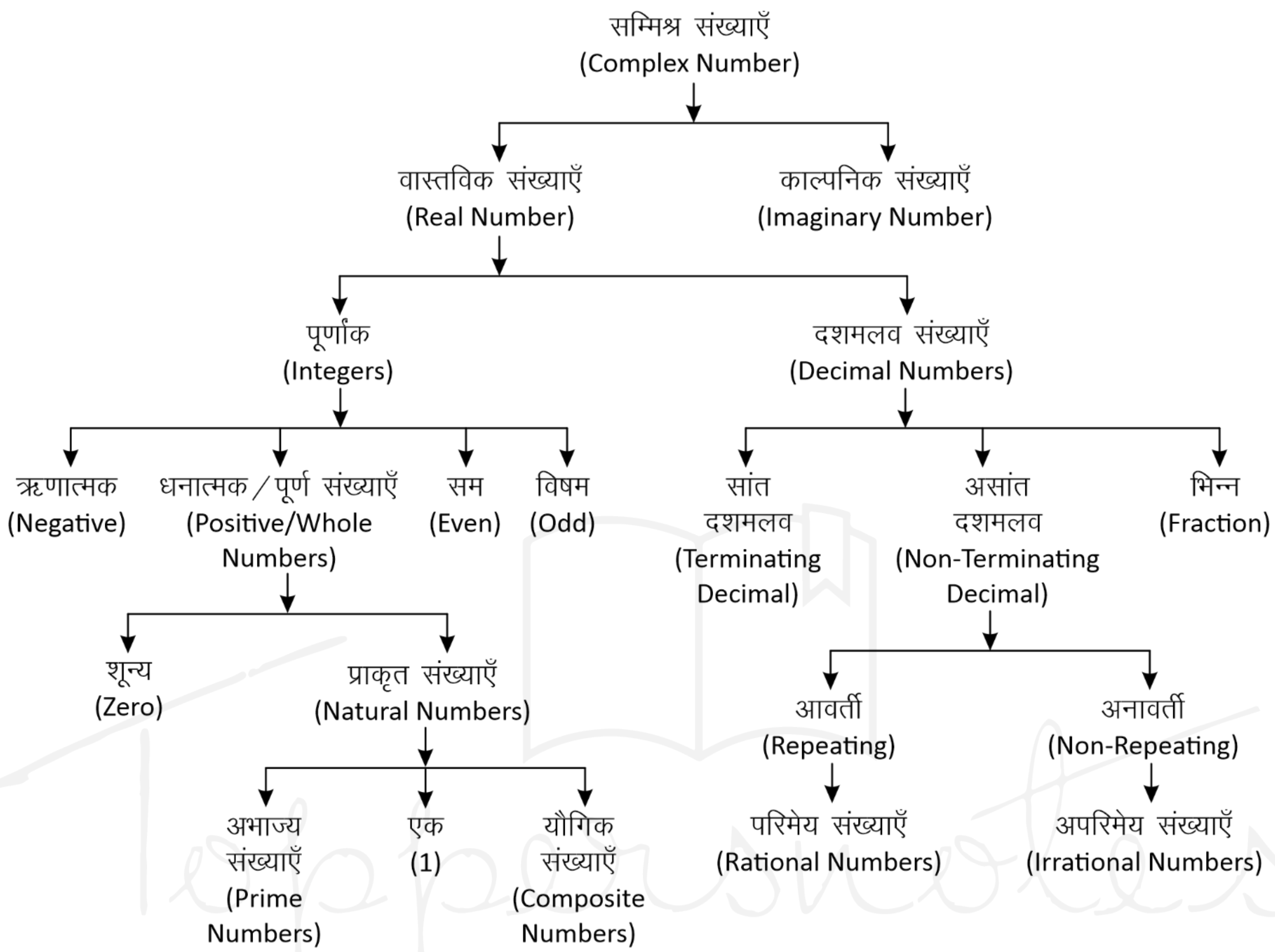
S No.	Chapter Title	Page No.
1	संख्या पद्धति	1
2	सरलीकरण	9
3	प्रतिशतता	19
4	लाभ – हानि	24
5	साझेदारी	31
6	औसत	34
7	परिमाण का क्रम (Order of Magnitude)	39
8	करणी व घातांक	42
9	साधारण ब्याज	51
10	चक्रवृद्धि ब्याज	55
11	लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक	61
12	सांख्यिकी (केंद्रीय प्रवृत्ति के माप)	66
13	समय और कार्य	76
14	अनुपात व समानुपात	82
15	प्रायिकता	89
16	क्रमचय व संचय	101
17	मिश्रण एवं एलीगेशन	107
18	क्षेत्रमिति	112
19	बीजगणित	128
20	ज्यामिति	139
21	नाव और धारा	168
22	पाइप और टंकी	171
23	चाल, समय और दूरी	173

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
24	डेटा इंटरप्रिटेशन	180

1
CHAPTER

संख्या पद्धति



वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers): परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती है, इसे I से सूचित करते हैं।

I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते है।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

धनात्मक/पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते है, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती है।

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

नोट : चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णत: विभाज्य होता है।

सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है।

n वां पद = 2n

प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती है।

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}\right\}$

प्राकृत संख्याएँ :

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) :- एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह संख्या स्वयं, उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे - {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}

- जहाँ 1 Prime Number नहीं है।
- 2 एकमात्र सम Prime संख्या है।
- 3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण - (4,9), (15, 22), (39, 40)

HCF = 1

परिमेय (Rational) संख्याएँ - वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

उदाहरण -

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ - इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण -

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}......$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

Toppersnotes Unleash the topper in you

उदाहरण - 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णत: भाग दिया जा सकता है।

हल -

$2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या = (3+1) (1+1) (1+1) (1+1)

= 4 × 2 × 2 × 2 = 32

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. जब संख्या घात (Power) के रूप में हो

   जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा।

   जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णत: विभाजित हो जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।

2. सरलीकरण के रूप में हो

   प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो

   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा।

2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

   n विषम होने पर भाजक → (a–b)

   n सम होने पर भाजक → (a – b) या (a + b) या दोनों।

(i) $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

(ii) $a^n \div (a+1) \begin{cases} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल } a \text{ होगा} \end{cases}$

(iii) $(a^n + a) \div (a - 1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा

(iv) $(a^n + a) \div (a+1) \begin{cases} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा।} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल } (a-1) \text{ होगा।} \end{cases}$

विभाज्यता के नियम

संख्या	नियम
2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे - 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे - 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे - 1024, 58764, 567800

5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे - 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे - 3060, 42462, 10242
7 से	यदि दी गयी संख्या के इकाई अंक का दुगुना बाकी संख्या (इकाई का अंक छोड़कर) से घटाने पर प्राप्त संख्या 7 से विभाजित है तो पूरी संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी। अथवा किसी संख्या में अंको की संख्या 6 के गुणज में हो तो संख्या 7 से विभाजित होगी। जैसे - 222222, 444444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे - 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 का गुणज हो तो जैसे - 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	किसी संख्या में एक ही अंक 6 बार दोहराए या अन्तिम अंक को 4 से गुणा करके शेष संख्या (इकाई अंक छोड़कर) में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे - 222222, 17784

उदाहरण

उदा.1 यदि किसी संख्या का 3/4 उस संख्या के 1/6 से 7 अधिक है, तो उस संख्या 5/3 क्या होगा?

(a) 12 (b) 18

(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

माना संख्या = x

प्रश्न के अनुसार,

$\Rightarrow \frac{9x-2x}{12} = 7$

$\Rightarrow 7x = 7 \times 12$

$\Rightarrow x = 12$

अत: संख्या का $\frac{5}{3}$ भाग

$= \frac{x-5}{3} = \frac{12\times5}{3} = 20$

Toppersnotes
Unleash the topper in you

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b, उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c)

माना कि दोनों संख्याएँ क्रमशः P और Q हैं।

$P + Q = a$

$PQ = b$

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=\frac{Q+P}{PQ}=\frac{a}{b}$$

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

(a) 1350 (b) 1250

(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

माना कि बड़ी संख्या x और छोटी संख्या y है।

$\therefore\ x + y = 75$ ....(i)

और, $x - y = 25$ ....(ii)

$2x = 100$ (समीकरण i और ii को जोड़ने पर)

$x = 50$

समीकरण (i) में x का मान रखने पर,

$50 + y = 75$

$y = 75 - 50 = 25$

अतः, दोनों संख्याओं का गुणनफल = $xy = 50 \times 25 = 1250$

Toppersnotes
Unleash the topper in you

प्र.4 150 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित करें कि उनका व्युत्क्रम योग हो। दोनों भागों की गणना करें।

(a) 50, 90 (b) 70, 80 (c) 60, 90 (d) 50, 100

Sol. (b)

माना कि पहला भाग x है तो इसका दूसरा भाग (150 – x)

प्रश्न के अनुसार,

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{(150-x)}=\frac{3}{112}$$

$$\Rightarrow \frac{150-x+x}{x(150-x)}=\frac{3}{112}$$

$\Rightarrow 3x(150 - x) = 150 \times 112$

$$\Rightarrow 150x - x^2 = \frac{150 \times 112}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 - 150x + 5600 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 70x - 80x + 5600 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 70) - 80(x - 70) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 80)(x - 70) = 0$$

$\therefore$ x = 80 या 70

यदि पहला भाग = 80 है तो दूसरा भाग = 150 - 80 $\Rightarrow$70

यदि पहला भाग = 70 है तो दूसरा भाग = 150 - 70 $\Rightarrow$ 80

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48

(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

मान कि एक विषम संख्या = x

प्रश्न के अनुसार,

$$(x) + (x + 2) + (x + 4) = 147$$

$$3x + 6 = 147$$

$$x = \frac{141}{3} = 47$$

अतः मध्य संख्या = (x + 2) = 47 + 2 = 49

Q.6 यदि 4 क्रमागत अभाज्य संख्याओं में से प्रथम तीन और अंतिम तीन का गुणनफल 385 और 1001 है, तो सबसे बड़ी अभाज्य संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: मान कि a, b, c तथा d चार अभाज्य संख्याएँ हैं।

abc = 385 (i)

bcd = 1001 (ii)

$$\frac{abc}{bcd} = \frac{385}{1001} = \frac{5}{13}$$

सबसे बड़ी अभाज्य संख्या = 13

ट्रिक: पहली n विषम संख्याओं का योग = n^2

1 + 3 + 5 + ... + 99 =?

$$? = \left(\frac{99+1}{2}\right)^2 = 2500 \text{ उत्तर}$$

प्र.7 50 और 100 के बीच सम संख्याओं का योग कितना होगा?

हल :- 52 + 54 + 56+............. + 98

= (2 + 4 + 6 +.... + 98) - (2 + 4 + 6 + ... + 50)

$$n = \frac{98}{2} = 49,\ n = \frac{50}{2} = 25$$

= 49 × 50 = 2450, 25 × 26 = 650

∴ ? = 2450 – 650 = 1800 उत्तर

प्र.8 50 से 100 के बीच विषम संख्याओं का योग कितना होगा?

हल :- 51 +53 + ...+99

= (1 + 3 + 5 + ... +99) – (1 + 3 + 5 + ... + 49)

$$= \frac{99+1}{2} = \frac{100}{2} = 50,\ \frac{49+1}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

∴ ? = $(50)^2 - (25)^2$

= 2500 – 625 = 1875 उत्तर

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है। तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706 (b) 2796

(c) 2736 (d) 2826

उत्तर (c)

शेषफल = 36

∴ भाजक = 5 × 36 = 180

∴ भागफल $= \frac{180}{12} = 15$

∴ लाभांश = भाजक × भागफल + शेषफल

= 180 × 15 + 36

= 2700 + 36

= 2736

प्रश्न 10 $(3694)^{1739} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$ का इकाई अंक क्या है?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5

हल: $(3694)^{1793}$ में इकाई अंक = 4; 4 में इकाई अंक = इकाई अंक $\left\{\left(4^2\right)^{896} \times 4\right\}$

(6 × 4) में इकाई अंक = 4

$(615)^{317}$ में इकाई अंक = $(5)^{317}$ में इकाई अंक = 5

$(841)^{491}$ में इकाई अंक = $(1)^{491}$ में इकाई अंक = 1

5 × 4 × 1 = 20, इकाई अंक = 0

Toppersnotes Unleash the topper in you

प्र.11 18.484848.... को $\frac{p}{q}$ के रूप में क्या लिखा जायेगा?

(a) $\frac{462}{25}$ (b) $\frac{610}{33}$ (c) $\frac{200}{11}$ (d) $\frac{609}{33}$

हल: मान x = 18.484848.................. तो,

100x = 1848. 484848........

घटाने पर, $99x = 1830 = x = \frac{1830}{99} = \frac{610}{33}$

अतः, 18.484848...... का $\frac{p}{q}$ अपेक्षित रूप है $= \frac{610}{33}$

उदा.2 $\frac{0.\overline{936} - 0.\overline{568}}{0.\overline{45} + 2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

हल :-

$$0.\overline{936} = \frac{936}{999},\ 0.\overline{568} = \frac{568}{999}$$

$$\therefore \left(0.\overline{936} - 0.\overline{568}\right) = \left(\frac{936}{999} - \frac{568}{999}\right) = \frac{(936-568)}{999} = \frac{368}{999}$$

$$0.\overline{45} = \frac{45}{99},\ 2.\overline{67} = 2 + 0.\overline{67} = 2 + \frac{67}{99} = \frac{198+67}{99} = \frac{265}{99}$$

$$\therefore \left(0.\overline{45} + 2.\overline{67}\right) = \left(\frac{45}{99} + \frac{265}{99}\right) = \frac{(45+265)}{99} = \frac{310}{99}$$

दिया गया व्यंजक $= \left(\frac{\overset{184}{\cancel{368}}}{\underset{111}{\cancel{999}}} \times \frac{\overset{11}{\cancel{99}}}{\underset{155}{\cancel{310}}}\right) = \frac{2024}{17205}$

उदा.1 $\left\{(127)^{127} + (97)^{127}\right\}$ तथा $\left\{(127)^{97} + (97)^{97}\right\}$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

(a) 127 (b) 97

(c) 30 (d) 224

हल :-

यदि m एक विषम संख्या (odd number) है, तो (x+y) $x^m + y^m$) का एक गुणक (factor) होगा।

$\therefore$ का गुणनखंड $\left\{(127)^{127} + (97)^{127}\right\} = (127+97) = 224$

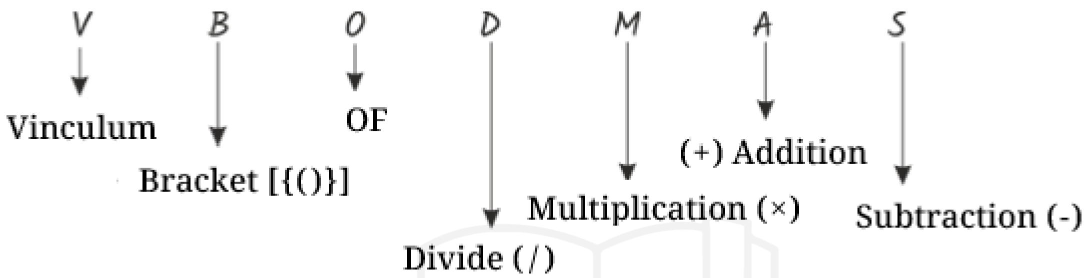
इसी प्रकार, का गुणनखंड $\left\{(127)^{97} + (97)^{97}\right\} = (127+97) = 224$

अतः, दोनों का सार्व गुणनखंड 224 है।

Toppersnotes
Unleash the topper in you

2 CHAPTER
सरलीकरण

- सरलीकरण के अंतर्गत हम दिए गये आँकडों को सरल रूप में प्रदर्शित करते हैं जैसे कि आँकडे भिन्न में, दशमलव में, बट्टे में, घात में तथा Mathematical Operation को हल करके या रूप बदल के किया जाता है ।
- यदि कुछ संख्या पर भिन्न-भिन्न प्रकार के Operation दिये हो तो हम उसे कैसे हल करे कि प्रश्न का उत्तर सही आये उसके लिये एक Rule होता है जिसे हम VBODMAS का Rule कहते है ।
- हम पहले कौनसा Operation करे, यह VBODMAS का Rule तय करता है ।



- इन सभी गणितीय क्रियाओं में सबसे पहले V है जिसका मतलब Vinculum (रेखा कोश्ठक) है । यदि प्रश्न में रेखा कोश्ठक है तो सर्वप्रथम उसे हल करेंगे और उसमें फिर (BODMAS) Rule कार्य करेगा
- द्वितीय स्थान पर B (Bracket) मतलब कोश्ठक है जो निम्न हो सकते हैं-
  1- छोटा कोश्ठक ( )
  2- मंझला कोश्ठक { }
  3- बड़ा कोश्ठक [ ]
- सबसे पहले छोटा कोश्ठक, फिर मंझला कोश्ठक और उसके बाद बड़ा कोश्ठक हल किया जाता है ।
- तृतीय स्थान पर "O" है जो कि "of" या "Order" से बना है, जिसका मतलब ''गुणा'' से या ''का'' से होता है ।
- चतुर्थ स्थान पर "D" है जिसका मतलब "Division" है, दिए गये व्यंजन में भिन्न-भिन्न क्रियाओं में सबसे पहले भाग करते है यदि दिया है तो ।
- पंचम स्थान पर "M" है जिसका मतलब "Multiplication" है, दिये गए व्यंजन में "Division" के बाद "Multiplication" (गुणा) करेंगे ।
- छठा स्थान "A" रखता है जो "Addition" (जोड़ा) से संबंधित है। Division-multiplication के बाद Addition क्रिया होती है ।
- सप्तम स्थान पर "S" है जो "Subtraction" से बना है ।

प्रश्न - सरल कीजिए ।

$$\left[3\frac{1}{4}\div\left\{1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2}-\overline{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{of }4\frac{1}{3}\right)$$

Toppersnotes Unleash the topper in you

हल:

Step 1 – सबसे पहले सभी मिश्र भिन्नों को साधारण भिन्नों में बदलते हैं।

$$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\overline{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{of}\frac{13}{3}\right)$$

अब VBODMAS के अनुसार

Step 2 – $\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{3-2}{12}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{of}\frac{13}{3}\right)$

Step 3 – $\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{12}\right)\right\}\right]\div\frac{13}{6}$

Step 4 – $\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{30-1}{12}\right)\right\}\right]\div\frac{13}{6}$

Step 5 – $\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{29}{12}\right\}\right]\div\frac{13}{6}$

Step 6 – $\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{30-29}{24}\right\}\right]\div\frac{13}{6}$

Step 7 – $\left[\frac{13}{4}\div\frac{1}{24}\right]\div\frac{13}{6}$

Step 8 – $\left[\frac{13}{4}\times 24\right]\div\frac{13}{6}$

Step 9 – $13\times 6\times\frac{6}{13}$

= 36 Ans.

toppersnotes
Unleash the topper in you

बीजगणितीय सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$
5. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
6. $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$
7. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b+c)^2+(c-a)^2\right]$
8. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
9. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

10. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right\}$$

यदि $a + b + c = 0$ हो तो

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

11. $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$

12. $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$

वर्ग और वर्गमूल सारणी

वर्ग	वर्गमूल	वर्ग	वर्गमूल
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$21^2 = 441$	$\sqrt{441} = 21$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$22^2 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$23^2 = 529$	$\sqrt{529} = 23$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$24^2 = 576$	$\sqrt{576} = 24$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$25^2 = 625$	$\sqrt{625} = 25$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$	$26^2 = 676$	$\sqrt{676} = 26$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$	$27^2 = 729$	$\sqrt{729} = 27$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$	$28^2 = 784$	$\sqrt{784} = 28$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$	$29^2 = 841$	$\sqrt{841} = 29$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$	$30^2 = 900$	$\sqrt{900} = 30$

घन और घनमूल सारणी

घन	घनमूल	घन	घनमूल
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$16^3 = 4096$	$\sqrt[3]{4096} = 16$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$17^3 = 4913$	$\sqrt[3]{4913} = 17$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$18^3 = 5832$	$\sqrt[3]{5832} = 18$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$19^3 = 6859$	$\sqrt[3]{6859} = 19$

Unleash the topper in you

$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$20^3 = 8000$	$\sqrt[3]{8000} = 20$
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$21^3 = 9261$	$\sqrt[3]{9261} = 21$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$22^3 = 10648$	$\sqrt[3]{10648} = 22$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$23^3 = 12167$	$\sqrt[3]{12167} = 23$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$	$24^3 = 13824$	$\sqrt[3]{13824} = 24$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$25^3 = 15625$	$\sqrt[3]{15625} = 25$
$11^3 = 1331$	$\sqrt[3]{1331} = 11$	$26^3 = 17576$	$\sqrt[3]{17576} = 26$
$12^3 = 1728$	$\sqrt[3]{1728} = 12$	$27^3 = 19683$	$\sqrt[3]{19683} = 27$
$13^3 = 2197$	$\sqrt[3]{2197} = 13$	$28^3 = 21952$	$\sqrt[3]{21952} = 28$
$14^3 = 2744$	$\sqrt[3]{2744} = 14$	$29^3 = 24389$	$\sqrt[3]{24389} = 29$
$15^3 = 3375$	$\sqrt[3]{3375} = 15$	$30^3 = 27000$	$\sqrt[3]{27000} = 30$

समान्तर श्रेणी

वह श्रेणी जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से कोई नियत राशि जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होता है।

जैसे - 2, 5, 8, 11, ...

समांतर श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = a + (n - 1)d$

जहाँ a = प्रथम पद

d = सार्व अंतर (द्वितीय पद - प्रथम पद)

n = पदों की संख्या

समांतर श्रेणी के n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

यदि प्रथम व अंतिम पद ज्ञात हो तो

$$S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$$

जहाँ $\ell =$ अंतिम पद

दो राशियों के मध्य समांतर माध्य

$$A = \frac{a+b}{2}$$ [a, b का समांतर माध्य A है।]

गुणोत्तर श्रेणी

यदि श्रेणी के प्रत्येक पद का उससे पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है तो गुणोत्तर श्रेणी होती है। इस निश्चित राशि को सार्वअनुपात कहते हैं।

गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद

$T_n = a.r^{n-1}$

जहाँ a = प्रथम पद

r = सार्व अनुपात

n = पदों की संख्या

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल

$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$; जब $r < 1$

$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$; जब $r > 1$

1. दो राशियों के मध्य गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$
2. यदि दो धनात्मक राशियों a व b के मध्य समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य A व G है तो

$$A > G, \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य में संबंध

माना A, G तथा H दो राशियों a व b के मध्य क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य है तब

$\boxed{G^2 = AH}$ तथा $\boxed{A > G > H}$

उदाहरण

उदा.1 $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$ of $2 \div (15 \div 8 \times 4)$ of $(28 \div 7$ of $5)$ का मान होगा –

(a) $4\frac{32}{75}$ (b) $4\frac{8}{75}$

(c) $4\frac{2}{3}$ (d) $4\frac{1}{6}$

हल :- (d)

$24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$ of $2 \div (15 \div 8 \times 4)$ of $(28 \div 7$ of $5)$

$= 24 \times (2/12) + 12 \div 12 \div [(15/8) \times 4]$ of $(28 \div 35)$

$= 4 + 1 \div (15/2)$ of $4/5$

$= 4 + 1 \div 6$

$= 4 + 1/6$

$= 4\frac{1}{6}$ उत्तर

उदा.3 सरल करें।

$2\frac{3}{4} \div 1\frac{5}{6} \div \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{7} \div \frac{3}{4}$ **of** $\frac{3}{7}$

(a) $\frac{56}{77}$ (b) $\frac{49}{80}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{2}{9}$

हल :- प्रश्न के अनुसार -

$$\left(\frac{2\frac{3}{4}}{1\frac{5}{6}}\right) \div \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{7} + \frac{3}{4} \text{ of } \frac{3}{7}$$

$$= \frac{\frac{11}{4}}{\frac{11}{6}} \div \frac{7}{8} \times \frac{7}{12} + \frac{5}{7} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{7}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{8}{7} \times \frac{7}{12} + \frac{5}{7} \times \frac{28}{9}$$

$$= 1 + \frac{20}{9}$$

$$= \frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$$ उत्तर

उदा.2 यदि $(102)^2 = 10404$ है, तो $\sqrt{\mathbf{104.04}} + \sqrt{\mathbf{1.0404}} + \sqrt{\mathbf{0.010404}}$ का मान किसके बराबर है ?

(a) 0.306 (b) 0.0306

(c) 11.122 (d) 11.322

उत्तर (d)

प्रश्न के अनुसार-

$$= \sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$$

$$= \sqrt{\frac{10404}{100}} + \sqrt{\frac{10404}{10000}} + \sqrt{\frac{10404}{1000000}}$$

$$= \frac{102}{10} + \frac{102}{100} + \frac{102}{1000}$$

$= 10.2 + 1.02 + 0.102 = 11.322$

उदा.2 710 में कौनसी छोटी संख्या जोड़ी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

(a) 29 (b) 19

(c) 11 (d) 21

उत्तर (b)

स्पष्ट रूप से,

$\therefore$ पूर्ण घन प्राप्त करने के लिए 710 में 19 जोड़ना होगा।

उदाहरण 8 निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए -

$$4 - \cfrac{5}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$$

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{32}$

हल :- (a)

Expression $$4 - \cfrac{5}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{8+1}{4}}}}$$

$$= 4 - \cfrac{5}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{9}}} \qquad = 4 - \cfrac{5}{1+\cfrac{1}{\cfrac{27+4}{9}}}$$

$$= 4 - \cfrac{5}{1+\cfrac{9}{31}} \qquad = 4 - \cfrac{5}{\cfrac{31+9}{31}}$$

$$= 4 - \frac{5\times31}{40} = \frac{160-155}{40}$$

$$= \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

उदा.2 यदि $2 = x + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$ है तो x का मान ज्ञात करें ।

(a) $\frac{18}{17}$ (b) $\frac{21}{17}$

(c) $\frac{13}{17}$ (d) $\frac{12}{17}$

हल:-

प्रश्न के अनुसार

$$2 = x + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow 2 = x + \cfrac{1}{1+\cfrac{4}{12+1}}$$

$$\Rightarrow 2 = x + \cfrac{1}{1+\cfrac{4}{13}} \qquad \Rightarrow 2 = x + \frac{13}{17}$$

$$\Rightarrow x = 2 - \frac{13}{17} \qquad \Rightarrow x = \frac{34-13}{17}$$

$$\Rightarrow x = \frac{21}{17}$$

उदा.1 $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ के बराबर है ?

(a) $2\frac{1}{2}$ (b) $3\frac{1}{2}$

(c) $4\frac{1}{2}$ (d) $5\frac{1}{2}$

हल:-

प्रश्न के अनुसार

$$=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\because (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab\right]$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=2+\frac{1}{2}+2=\frac{4+1+4}{2}$$

$$=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

उदा.2 $\frac{0.51\times0.051\times0.051+0.041\times0.041\times0.041}{0.51\times0.051-0.051\times0.041+0.041\times0.041}$ का मान क्या है ?

(a) 0.92 (b) 0.092

(c) 0.0092 (d) 0.00092

उत्तर (b)

प्रश्न के अनुसार

$$\frac{0.051\times0.051\times0.051+0.041\times0.041\times0.041}{0.051\times0.051-0.051\times0.041+0.041\times0.041}$$

We know that,

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$

$$=\frac{(0.051)^3+(0.041)^3}{(0.051)^2+(0.041)^2-0.051\times0.041}$$

$$=\frac{[0.051+0.041]\left[(0.051)^2+(0.041)^2-0.051\times0.041\right]}{\left[(0.051)^2+(0.041)^2-0.051\times0.041\right]}$$

= 0.051 + 0.041 = 0.092 उत्तर

उदा.2 निम्नलिखित समांतर श्रेणी में कितने पद हैं?

7, 13, 19, ... , 205

हल :- $a = 7$, $d = 13 - 7 = 6$, $T_n = 205$

$T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow 205 = 7 + (n - 1)\ 6$

$\Rightarrow 205 - 7 = (n - 1)\ 6$

$\Rightarrow 198 = (n - 1)6$

$\Rightarrow n - 1 = 33$

$\Rightarrow n = 33 + 1$

$\Rightarrow n = 34$

इस श्रृंखला में 34 पद हैं।

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गों का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

(a) 40 (b) 44

(c) 80 (d) 89

उत्तर (a)

प्रश्न के अनुसार

$x + y = 22$ .... (i)

$x^2 + y^2 = 404$ .... (ii)

$\Rightarrow (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$\Rightarrow (22)^2 = 404 + 2\,xy$

$\Rightarrow 484 = 404 + 2\,xy$

$\Rightarrow 2xy = 80$

$\Rightarrow xy = 40$ उत्तर

उदा.3 जब एक दो अंकों की संख्या को उसके अंकों के योग से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 424 होता है। जब उसके अंकों को आपस में बदलने से प्राप्त संख्या को अंकों के योग से गुणा किया जाता है तो परिणाम 280 होता है । संख्या के अंकों का योग कितना है?

(a) 7 (b) 9

(c) 6 (d) 8

उत्तर (d)

माना इकाई अंक की संख्या x है और दसवें अंक की संख्या y है, तो संख्या

$= 10y + x$

प्रश्न के अनुसार

$(10y + x) \times (x + y) = 424$ ----(1)

$(10x + y) \times (x + y) = 280$ ----(2)