



# छत्तीसगढ़

## शिक्षक पात्रता परीक्षा

### CG-TET

छत्तीसगढ़ व्यावसायिक परीक्षा मण्डल, रायपुर

विज्ञान वर्ग (6-8)

भाग - 4

गणित



# विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
1	संख्या पद्धति	1
2	लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक	8
3	वर्ग और वर्गमूल	11
4	घन और घनमूल	14
5	बीजगणित	16
6	लाभ - हानि	21
7	बट्टा	26
8	प्रतिशतता	29
9	अनुपात व समानुपात	33
10	भिन्न	37
11	आयु (Age Problems)	39
12	साधारण ब्याज	41
13	चक्रवृद्धि ब्याज	44
14	सांख्यिकी (केंद्रीय प्रवृत्ति के माप)	47
15	ज्यामिति	53
16	क्षेत्रमिति	70
17	प्रायिकता	85
18	गणित की प्रकृति एवं तर्क शक्ति	92
19	गणित की प्रकृति	94
20	गणित की भाषा	95
21	गणितीय शिक्षण की नवीन विधियाँ	97
22	गणित की शिक्षण विधियाँ	101
23	शिक्षण की समस्याएँ	107

# विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
24	मापन एवं मुल्यांकन	108
25	निदानात्मक एवं उपचारात्मक शिक्षण	113

## 1

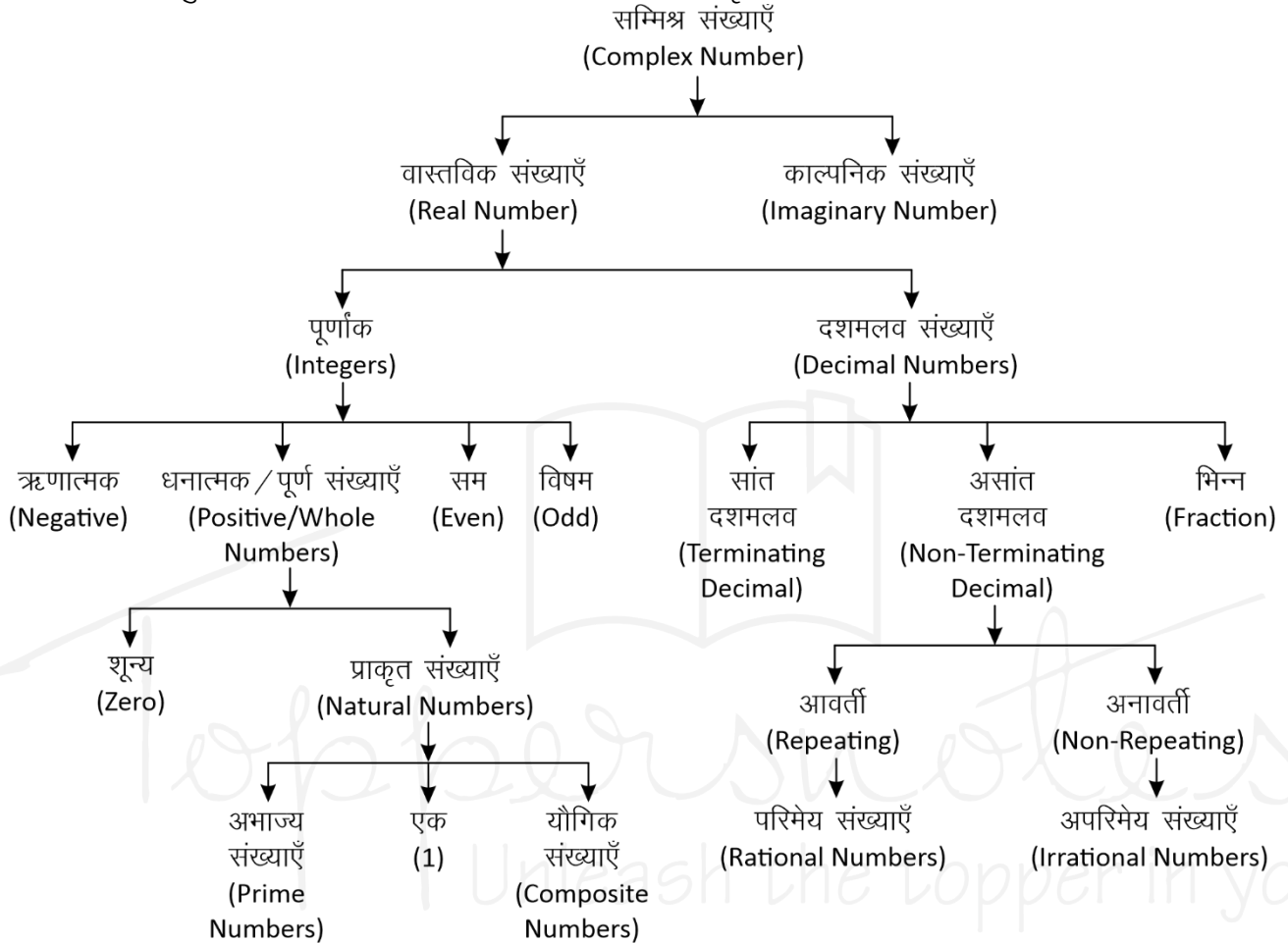
## CHAPTER

# संख्या पद्धति (Number System)



**संख्या पद्धति :-** किसी भी यौगिक राशि के परिणामों का बोध कराने के लिए जिस पद्धति का उपयोग होता है, संख्या पद्धति कहलाती है।

संख्याओं को उनके गुणों और विशेषताओं के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है –



## सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)

वे सभी संख्याएँ जो वास्तविक और काल्पनिक संख्याओं से मिलकर बनी होती हैं।

इन्हें  $(a + ib)$  के रूप में लिखा जाता है। जहाँ  $a$  और  $b$  वास्तविक संख्याएँ हैं तथा  $i = \sqrt{-1}$  है।

$$Z = a \text{ (वास्तविक संख्या)} + ib \text{ (काल्पनिक संख्या)}$$

- वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers):** परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।
- पूर्णांक संख्याएँ :** संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे  $I$  से सूचित करते हैं।  
 $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

- धनात्मक/पूर्ण संख्याएँ :** जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

**नोट :** चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

- प्राकृत संख्याएँ :** जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं।

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं का योग  $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग  $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग =

$$\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है।

**उदाहरण –**

$$11^2 = 121$$

$$12^2 = 144$$

$$11 + 12 \rightarrow 23 \quad \text{Difference } 144 - 121 = 23$$

**(a) अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) :-** एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह संख्या स्वयं, उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

**जैसे –** {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.....}

• तीन अंको की सबसे छोटी अभाज्य संख्या = 101

• तीन अंको की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या = 997

जहाँ 1 Prime Number नहीं है।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

**अभाज्य संख्याओं का परीक्षण :-** दी गयी संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। माना यह संख्या  $x$  है, अब  $x$  से छोटी समस्त अभाज्य संख्याओं की सहायता से दी गयी संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए।

• यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक अभाज्य संख्या होगी।

**उदाहरण –**

क्या 349 एक अभाज्य संख्या है या नहीं ?

**हल –**

349 का संभावित वर्गमूल 19 होगा और 19 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 है।

स्पष्ट है कि 349 इन सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्य नहीं है अतः 349 भी एक अभाज्य संख्या है।

**सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) –** वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

**उदाहरण –** (4,9), (15, 22), (39, 40)

$$\text{HCF} = 1$$

**(b) यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers) :-** वे प्राकृत संख्याएँ जो 1 या स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से भी विभाज्य हो, यौगिक संख्याएँ कहलाती हैं।  
**जैसे –** 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

**(ii) सम संख्याएँ :** संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती हैं।

$$n \text{ वां पद} = 2n$$

$$\text{प्रथम } n \text{ सम संख्याओं का योग} = n(n+1)$$

$$\text{प्रथम } n \text{ सम संख्याओं के वर्गों का योग} =$$

$$\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2} \right\}$$

**(iii) विषम संख्याएँ :** वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं।

$$\text{प्रथम } n \text{ विषम संख्याओं का योग} = n^2$$

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2} \right\}$$

**II. दशमलव**

दशमलव वे संख्याएँ हैं जो दो पूर्ण संख्याओं या पूर्णांकों के बीच आती हैं। जैसे – 3.5 एक दशमलव संख्या है जो 3 व 4 के बीच स्थित है।

• प्रत्येक दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक भिन्न को भी दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

**(i) सांत दशमलव**

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है।

**(ii) असांत दशमलव**

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक।

$$\text{जैसे – } 0.3333, 0.7777, 0.183183183.....$$

ये दो प्रकार के हो सकते हैं –

**A. आवर्ती दशमलव भिन्न (Repeating)**

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

$$\text{जैसे – } \frac{1}{3} = 0.333..., \frac{22}{7} = 3.14285714.....$$

• ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं।

इसे बार बोलते हैं।

$$0.333..... = 0.\overline{3}$$

$$\frac{22}{7} = 3.14285714..... = 3.14285\overline{7}$$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.\overline{P} = \frac{P}{9} \quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99} \quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.p\overline{q} = \frac{pq - p}{90} \quad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$$

$$0.\overline{pqr} = \frac{pqr - p}{990} \quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs - pq}{9900}$$

उदाहरण -

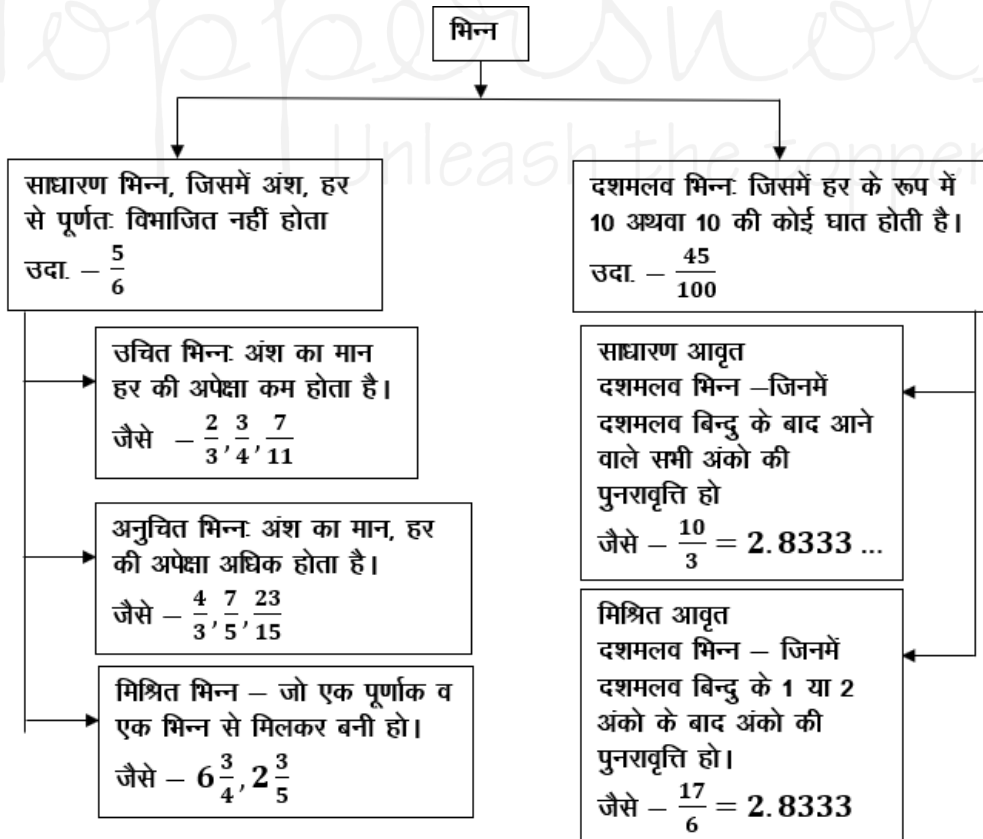
$$(i) \quad 0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$$

$$(ii) \quad 0.\overline{625} = \frac{625 - 6}{990} = \frac{619}{990}$$

$$(iii) \quad 0.\overline{3524} = \frac{3524 - 35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$$

- परिमेय (Rational) संख्याएँ - वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

भिन्नों के प्रकार



उदाहरण -

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$$

### B. अनावर्ती (Non-Repeating)

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती।

जैसे -  $\pi = 3.1415926535897932...$

$\sqrt{2} = 1.41421356237...$

- अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ - इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण -

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}.....$

**भिन्न (Fraction) :-** भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण चीज का कोई भाग निरूपित करती है।

जैसे एक सेब के चार भाग किये जाते हैं, उसमें से एक हिस्सा निकाल दिया गया तो उसे  $\frac{1}{4}$  के रूप में प्रदर्शित

किया जाता है। जबकि शेष बचे भाग को  $\frac{3}{4}$  के रूप में

प्रदर्शित किया जायेगा।

भिन्न दो भागों में बंटा होता है - अंश व हर

माना कोई भिन्न =  $\frac{p}{q}$

$p \rightarrow$  अंश  
 $q \rightarrow$  हर



<p><math>n</math> विषम होने पर भाजक <math>\rightarrow (a-b)</math></p> <p><math>n</math> सम होने पर भाजक <math>\rightarrow (a-b)</math> या <math>(a+b)</math> या दोनों ।</p> <p>(i) <math>a^n \div (a-1)</math> हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा ।</p> <p>(ii) <math>a^n \div (a+1)</math> <math>\left\{ \begin{array}{l} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल } a \text{ होगा} \end{array} \right.</math></p> <p>(iii) <math>(a^n + a) \div (a-1)</math> हो, तो शेषफल 2 बचेगा</p> <p>(iv) <math>(a^n + a) \div (a+1)</math> <math>\left\{ \begin{array}{l} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा।} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल } (a-1) \text{ होगा।} \end{array} \right.</math></p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="6">रोमन पद्धति के संकेतक</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>I</td><td>20</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>XX</td> </tr> <tr> <td>2</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>II</td><td>30</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>XXX</td> </tr> <tr> <td>3</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>III</td><td>40</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>XL</td> </tr> <tr> <td>4</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>IV</td><td>50</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>L</td> </tr> <tr> <td>5</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>V</td><td>100</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>C</td> </tr> <tr> <td>6</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>VI</td><td>500</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>D</td> </tr> <tr> <td>7</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>VII</td><td>1000</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>M</td> </tr> <tr> <td>8</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>VIII</td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>9</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>IX</td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>10</td><td><math>\rightarrow</math></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td> </tr> </tbody> </table>	रोमन पद्धति के संकेतक						1	$\rightarrow$	I	20	$\rightarrow$	XX	2	$\rightarrow$	II	30	$\rightarrow$	XXX	3	$\rightarrow$	III	40	$\rightarrow$	XL	4	$\rightarrow$	IV	50	$\rightarrow$	L	5	$\rightarrow$	V	100	$\rightarrow$	C	6	$\rightarrow$	VI	500	$\rightarrow$	D	7	$\rightarrow$	VII	1000	$\rightarrow$	M	8	$\rightarrow$	VIII				9	$\rightarrow$	IX				10	$\rightarrow$	X			
रोमन पद्धति के संकेतक																																																																			
1	$\rightarrow$	I	20	$\rightarrow$	XX																																																														
2	$\rightarrow$	II	30	$\rightarrow$	XXX																																																														
3	$\rightarrow$	III	40	$\rightarrow$	XL																																																														
4	$\rightarrow$	IV	50	$\rightarrow$	L																																																														
5	$\rightarrow$	V	100	$\rightarrow$	C																																																														
6	$\rightarrow$	VI	500	$\rightarrow$	D																																																														
7	$\rightarrow$	VII	1000	$\rightarrow$	M																																																														
8	$\rightarrow$	VIII																																																																	
9	$\rightarrow$	IX																																																																	
10	$\rightarrow$	X																																																																	

### विभाज्यता के नियम

संख्या	नियम
2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे - 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या में अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे - 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे - 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे - 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे - 3060, 42462, 10242
7 से	यदि दी गयी संख्या के इकाई अंक का दुगुना बाकी संख्या (इकाई का अंक छोड़कर) से घटाने पर प्राप्त संख्या 7 से विभाजित है तो पूरी संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी। अथवा किसी संख्या में अंकों की संख्या 6 के गुणज में हो तो संख्या 7 से विभाजित होगी। जैसे - 222222, 444444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे - 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 का गुणज हो तो जैसे - 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	किसी संख्या में एक ही अंक 6 बार दोहराए या अन्तिम अंक को 4 से गुणा करके शेष संख्या (इकाई अंक छोड़कर) में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे - 222222, 17784



## अभ्यास प्रश्न

### संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 यदि किसी संख्या का  $\frac{3}{4}$  उस संख्या के  $\frac{1}{6}$  से 7 अधिक है, तो उस संख्या  $\frac{5}{3}$  क्या होगा?

- (a) 12 (b) 18  
(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल  $a$  तथा  $b$ , उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

- (a)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  (b)  $\frac{b}{a}$   
(c)  $\frac{a}{b}$  (d)  $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

- (a) 1350 (b) 1250  
(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का  $\frac{5}{16}$  ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का  $\frac{5}{6}$  ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये।

- (a) 300 (b) 480  
(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

### सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी।

- (a) 47 (b) 48  
(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

### भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 64329 को जब किसी संख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते हैं तो भाज्य क्या है ?

- (a) 184 (b) 224  
(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2  $(3^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28})$  विभाजित है।

- (a) 11 (b) 16  
(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है। तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

- (a) 2706  
(b) 2796  
(c) 2736  
(d) 2826

उत्तर (c)

### इकाई अंक निकालना आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1  $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$  के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

कितना है ?

- (a) 0 (b) 2  
(c) 3 (d) 5

## प्राकृतिक संख्याओं के square/cube के योग एवं अंतर पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1  $(11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 20^2) = ?$

- (a) 385 (b) 2485  
(c) 2870 (d) 3255

उदा.2  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = ?$

## दशमलव संख्या आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016 \times 0.025}{0.325 \times 0.05} \div \frac{0.1216 \times 0.105 \times 0.002}{0.08512 \times 0.625 \times 0.039} + \left( \sqrt[4]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}} \right)^2$$

उसका उत्तर  $\frac{19}{10}$  था। उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2  $\frac{0.936 - 0.568}{0.45 + 2.67}$  को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

## शून्य की संख्या पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1  $(1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times \dots \times 98^{98} \times 99^{99} \times 100^{100})$

के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?  
(a) 1200 (b) 1300  
(c) 1500 (d) 1600

उदा.2  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 250$  को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

## सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करने पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 निम्न में से  $\frac{2}{5}$  और  $\frac{4}{9}$  के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

- (a)  $\frac{3}{7}$  (b)  $\frac{2}{3}$   
(c)  $\frac{4}{5}$  (d)  $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बड़ी संख्या है।

- $(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$   
(a)  $(2)^{\frac{1}{2}}$  (b) 1  
(c)  $(6)^{\frac{1}{6}}$  (d)  $(3)^{\frac{1}{3}}$

## आरोही/अवरोही क्रम आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$  को बढ़ते क्रम में लिखने पर -

- (a)  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$  (b)  $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$   
(c)  $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$  (d)  $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ -  
 $\sqrt{7} - \sqrt{5}, \sqrt{5} - \sqrt{3}, \sqrt{9} - \sqrt{7}, \sqrt{11} - \sqrt{9}$

उदा.3 संख्याओं  $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$  को अवरोही क्रम में लिखिये ?

## गुणनखंडों की संख्या पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1  $\{(127)^{127} + (97)^{127}\}$  तथा  $\{(127)^{97} + (97)^{97}\}$  का

उभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

- (a) 127 (b) 97  
(c) 30 (d) 224

उदा.2  $\frac{(18)^{15} \times (75)^{16} \times (42)^{14}}{(35)^{12} \times (12)^{16}}$  में कितने अभाज्य खंड हैं ?

# 2

## CHAPTER

# लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक (LCM & HCF)



### गुणनखण्ड

एक संख्या को दूसरे का गुणनखण्ड कहा जाता है, यदि यह दूसरे को पूरी तरह से विभाजित कर दे। इस प्रकार 3 व 4, 12 के गुणनखण्ड हैं।

### समापवर्तक

वह संख्या जो दो या दो से अधिक दी हुयी संख्याओं को पूर्णतः विभाजित कर दे, उन संख्याओं का समापवर्तक कहलाती है। इस प्रकार 9, 18, 21 एवं 33 का एक समापवर्तक 3 है।

### LCM (Lowest Common Multiple) (लघुत्तम समापवर्त्य)

- वह सबसे छोटी संख्या जो दी गयी संख्याओं से पूर्णतया: विभाज्य हो, LCM कहलाती है।
- **Power** वाले संख्या का LCM निकालना – अभाज्य गुणनखण्ड करने के बाद Power के रूप में लिखेंगे और जितने अभाज्य संख्या का प्रयोग होगा उसे गुणा के रूप में लिखेंगे और उस पर अधिकतम Power रखेंगे।

उदा.1  $(12)^{16}, (18)^{15}, (30)^{18}$  का LCM निकाले।

हल  $(12)^{16} = (2 \times 2 \times 3)^{16} = (2^2 \times 3)^{16} = 2^{32} \times 3^{16}$

$(18)^{15} = (2 \times 3 \times 3)^{15} = (2 \times 3^2)^{15} = 2^{15} \times 3^{30}$

$(30)^{18} = (2 \times 3 \times 5)^{18} = 2^{18} \times 3^{18} \times 5^{18}$

अतः LCM =  $2^{32} \times 3^{30} \times 5^{18}$  Ans.

### भिन्नों का LCM निकालना

$$\text{LCM} = \frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$$

उदा.2  $\frac{1}{2}$  व  $\frac{5}{8}$  का LCM ?

$$\text{LCM} = \frac{1 \text{ व } 5 \text{ का LCM}}{2 \text{ व } 8 \text{ का HCF}} \Rightarrow \frac{5}{2}$$

### HCF (Highest Common Factor) महत्तम समापवर्तक

- वह सबसे बड़ी संख्या जिससे दी गयी सभी संख्याएँ पूर्णतः विभाजित हो, HCF कहलाता है।
- जैसे – 18 एवं 24 का म.स.प. 6 है।

उदा.1 HCF निकालना : दो संख्याओं का HCF भाग विधि द्वारा निकाला जाता है, तो भागफल क्रमशः 3, 4, एवं 5 प्राप्त होता है। यदि दो संख्याओं का HCF, 18 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दो संख्याएँ a एवं b हैं

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} 3 \\ c \overline{) a} 4 \\ d \overline{) c} 5 \\ \quad \times \end{array}$$

अन्तिम भाजक HCF होता है।

$$d = 18$$

$$c = 5 \times d = 5 \times 18 = 90$$

$$a = (4 \times c) + d$$

$$= (4 \times 90) + 18 = 378$$

$$b = 3a + c$$

$$= (3 \times 378) + 90 = 1134 + 90$$

$$= 1224, 378 \text{ Ans}$$

### Power वाली संख्या का HCF निकालना

पहले Base का अभाज्य गुणनखण्ड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे और जो सभी में Common अभाज्य संख्या होगी, उसे गुणा के रूप में लिखेंगे और उस पर न्यूनतम Power रखेंगे।

उदा.1  $(24)^8, (36)^{12}, (18)^{16}$  का HCF निकालें।

हल  $24 = (2^3 \times 3)^8 = 2^{24} \times 3^8$

$36 = (2^2 \times 3^2)^{12} = 2^{24} \times 3^{24}$

$18 = (2 \times 3^2)^{16} = 2^{16} \times 3^{32}$

अतः म.स.प. =  $2^{16} \times 3^8$

### भिन्न का HCF निकालना

$$\text{भिन्न का HCF} = \frac{\text{अंश का HCF}}{\text{हर का LCM}}$$

उदा.1  $\frac{18}{25}, \frac{12}{7}, \frac{6}{35}$

हल  $\frac{18, 12, 6 \text{ का HCF}}{25, 7, 35 \text{ का LCM}} = \frac{6}{175}$

किसी दो संख्याओं का जोड़ तथा ल.स.प. का म.स.प., उन संख्याओं के म.स. के बराबर होता है।

माना दो संख्याएँ x तथा y हैं, तथा उनका म.स. H है।

अतः  $x = Ha$

$y = Hb$

जहाँ  $a$  तथा  $b$  परस्पर अभाज्य हैं।

$x, y$  का  $LCM = Hab$

और  $x + y = H(a + b)$

अब 'a' तथा 'b' परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं, तो  $(a + b)$  तथा  $ab$  भी परस्पर अभाज्य होगी। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि  $H(a + b)$  तथा  $Hab$  का म.स.  $H$  ही होगा, जो  $x$  तथा  $y$  का भी म.स. है।

### LCM एवं HCF में Relation

$LCM \times HCF =$  दोनों संख्याओं का गुणनफल

उदा.1 दो संख्याओं का LCM एवं HCF क्रमशः 420 एवं 28 हैं। यदि एक संख्या 84 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए –

हल दूसरी संख्या =  $\frac{420 \times 28}{84} = 140$

- जब कहा जाये कि  $x, y, z$  के लिये वह छोटी से छोटी संख्या क्या होगी जिसमें भाग देने पर  $r$  शेष बच जाये, इसके लिए उत्तर होगा  $x, y, z$  का  $(LCM + r)$ ।
- वह छोटी से छोटी संख्या जिसे  $x, y, z$  से भाग करने पर शेषफल क्रमागत  $a, b, c$  हो। इसके लिये उत्तर होगा –  $(x, y, z) - K$  का LCM।

### अभ्यास प्रश्न

#### महत्तम समापवर्तक आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 84, 126, 140 का महत्तम समापवर्तक कितना है ?

उदा.2  $x^6 - 1$  और  $x^4 + 2x^3 - 2x^1 - 1$  का म.स. क्या होगा ?

- (a)  $x^2 + 1$  (b)  $x - 1$   
(c)  $x^2 - 1$  (d)  $x + d$

उत्तर (c)

#### लघुत्तम समापवर्त्य आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 15, 18, 24, 27, 36 का लघुत्तम समापवर्त्य क्या होगा ?

उदा.2 दो संख्याओं का योग 45 है। उनका अंतर योग का  $\frac{1}{9}$  है, तो उनका ल.स. ज्ञात करें।

- (a) 200 (b) 250  
(c) 100 (d) 150

उत्तर (c)

उदा.3 छः घण्टियाँ एक साथ बजनी आरम्भ हुई, यदि ये घण्टियाँ क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10, 12 सेकण्ड के अंतराल से बजे, तो 30 मिनट में कितनी बार ये एक साथ इक्कट्टी बजेंगी ?

- (a) 4 बार  
(b) 10 बार  
(c) 16 बार  
(d) इनमें से कोई नहीं

### भिन्नों के ल.स.प. तथा म.स.प.



प्रश्नों के हल



उदा.1  $\frac{14}{33}, \frac{42}{55}, \frac{21}{22}$  का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए –

उदा.2  $\frac{11}{14}, \frac{55}{42}, \frac{33}{35}, \frac{44}{63}$  का लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए –

उदा.3 तीन व्यक्ति एक 11 किमी. लम्बे वृत्ताकार पथ पर एक साथ एक ही दिशा में चलना प्रारंभ करते हैं। उनकी चाल क्रमशः 4, 5.5 एवं 8 किमी. प्रति घंटा है। वे तीनों एक साथ कितने समय बाद प्रारंभिक बिन्दु पर मिलेंगे ?

### ल.स.प. तथा म.स.प. के मध्य संबंध आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 दो संख्याओं का ल.स. 225 तथा म.स. 5 है। यदि उसमें से एक संख्या 25 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 5 (b) 25  
(c) 45 (d) 225

उत्तर (c)

उदा.2 दो संख्याओं का योग 36 है, इनका महत्तम समापवर्तक 3 तथा लघुत्तम समापवर्त्य 105 है, इन संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग कितना होगा ?

- (a)  $\frac{2}{35}$  (b)  $\frac{3}{25}$   
(c)  $\frac{4}{35}$  (d)  $\frac{2}{25}$

उत्तर (c)

उदा.3 दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. का योग 680 है उनका ल.स., म.स. का 84 गुणा है। यदि एक संख्या 56 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 84 (b) 12  
(c) 8 (d) 96

उत्तर (d)

उदा.4 दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य क्रमशः 12 तथा 72 है, यदि इन संख्याओं का योग 60 हो, तो इनमें से छोटी संख्या निम्न में से कौन-सी है ?

- (a) 12 (b) 24  
(c) 60 (d) 72

उत्तर (b)



Toppernotes  
Unleash the topper in you

# 3

## CHAPTER

# वर्ग और वर्गमूल

- किसी संख्या का वर्ग वह संख्या है, जो स्वयं या उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

$$\text{Eg. } 8 \times 8 = 64$$

64, 8 का वर्ग है, क्योंकि 8 को 8 से गुणा करने पर 64 प्राप्त होता है।

- 1, 4, 9, 16, 25..... वर्ग संख्याएँ हैं, ये पूर्ण वर्ग संख्याएँ कहलाती हैं।

- दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच में कोई भी संख्या किसी भी संख्या का वर्ग नहीं होती है।

Eg. दो क्रमागत वर्ग संख्या 4 और 9 के बीच स्थित 4, 6, 7, 8 संख्याएँ किसी भी संख्या का वर्ग नहीं हैं।

- सभी वर्ग संख्याओं के अन्त में इकाई के स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होता है।

- यदि एक संख्या के इकाई के स्थान पर 1 या 9 आता है, तब वर्ग संख्या के अंत में 1 आयेगा।

- यदि एक संख्या के इकाई के स्थान पर 4 या 6 आता है, तब वर्ग संख्या के अन्त में 6 आयेगा।

- वर्ग संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या केवल सम होती है।

### क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग –

- किसी भी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते हैं।

$$\text{Eg. } 5^2 = 25 = 12 + 13, 7^2 = 49 = 24 + 25$$

- दो क्रमागत विषम संख्याओं के गुणनफल में एक जोड़ने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

$$\text{Eg. } 15 \times 17 = 255 + 1 = 256$$

$$\sqrt{256} = 16$$

- दो क्रमागत सम संख्याओं के गुणनफल में भी 1 जोड़ने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

$$\text{Eg. } 22 \times 24 = 528 + 1 = 529 = (23)^2$$

- **वर्गमूल** – किसी संख्या का वर्गमूल वह है जिसे स्वयं से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है।

Eg.  $x$  के वर्गमूल को  $\sqrt{x}$  से गुणा करते हैं।

- एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल प्राप्त होते हैं।

$$\text{Eg. } 3^2 = 9, \sqrt{9} = 3$$

- एक पूर्ण संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल प्राप्त होते हैं।

$$\text{Eg. } 3^2 = 9, \sqrt{9} = 3$$

- एक पूर्ण संख्या में यदि  $x$  अंक है तो उसके वर्गमूल में  $\frac{x}{2}$  अंक होंगे। यदि  $x$  सम है या  $\frac{x+1}{2}$  अंक होंगे, यदि  $x$  विषम है।

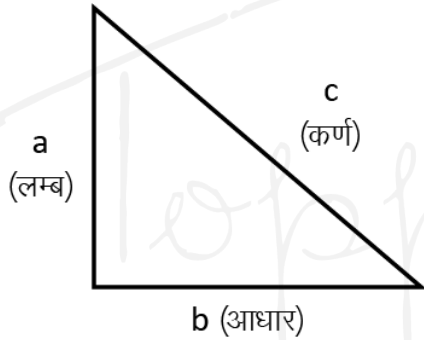
Eg. निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{(i) } 42 &= (40 + 2)^2 \\ &= 40(40 + 2) + 2(40 + 2) \\ &= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2 \\ &= 1600 + 80 + 80 + 4 \\ &= 1764 \end{aligned}$$

वर्ग तथा वर्गमूल तालिका

Square	Square Root	Square	Square Root
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$21^2 = 441$	$\sqrt{441} = 21$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$22^2 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$23^2 = 529$	$\sqrt{529} = 23$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$24^2 = 576$	$\sqrt{576} = 24$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$25^2 = 625$	$\sqrt{625} = 25$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$	$26^2 = 676$	$\sqrt{676} = 26$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$	$27^2 = 729$	$\sqrt{729} = 27$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$	$28^2 = 784$	$\sqrt{784} = 28$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$	$29^2 = 841$	$\sqrt{841} = 29$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$	$30^2 = 900$	$\sqrt{900} = 30$

- पाइथोगोरस प्रमेय – दो संख्याओं के वर्गों का योग तीसरी संख्या के वर्ग के बराबर होता है।



$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$\text{लम्ब}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2$$

$$\text{आधार}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{लम्ब}^2$$

उदा. 1 The value of

$$\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + \sqrt{49}}}}} \text{ is}$$

(1) 3 (2) 9

(3) 7 (4) 5

हल 
$$\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + 7}}}}$$

$$= \sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + 6}}}$$

$$= \sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{25}}}$$

$$= \sqrt{5 + \sqrt{11 + 5}} = \sqrt{5 + 4}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

उदा. 2 यदि  $(102)^2 = 10404$  है, तो

$$\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$$

का मान किसके बराबर है ?

(a) 0.306 (b) 0.0306

(c) 11.122 (d) 11.322

हल (d) According to the Question.

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404} \\
&= \sqrt{\frac{10404}{100}} + \sqrt{\frac{10404}{10000}} + \sqrt{\frac{10404}{1000000}} \\
&= \frac{102}{10} + \frac{102}{100} + \frac{102}{1000} \\
&= 10.2 + 1.02 + 0.102 = 11.322
\end{aligned}$$

उदा. 3 920 में कम से कम क्या जोड़ें कि योगफल एक पूर्ण वर्ग हो ?

- (a) 31 (b) 39  
(c) 41 (d) 49

हल स्पष्ट है कि  $(30)^2 < 920 < (31)^2$  जोड़े जानी वाली संख्या  $= (31)^2 - 920 = (961 - 920) = 41$ .



Toppernotes  
Unleash the topper in you



# 4 CHAPTER

## घन और घनमूल

- सम संख्याओं का घन एक सम संख्या होती है।
- विषम संख्याओं का घन एक विषम संख्या होती है।

- क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ने पर एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त होती है।

$$1 = 1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 8 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$$

$$= 216 = 6^3$$

### घन और घनमूल तालिका

Cube	Cube Root	Cube	Cube Root
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$16^3 = 4096$	$\sqrt[3]{4096} = 16$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$17^3 = 4913$	$\sqrt[3]{4913} = 17$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$18^3 = 5832$	$\sqrt[3]{5832} = 18$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$19^3 = 6859$	$\sqrt[3]{6859} = 19$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$20^3 = 8000$	$\sqrt[3]{8000} = 20$
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$21^3 = 9261$	$\sqrt[3]{9261} = 21$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$22^3 = 10648$	$\sqrt[3]{10648} = 22$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$23^3 = 12167$	$\sqrt[3]{12167} = 23$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$	$24^3 = 13824$	$\sqrt[3]{13824} = 24$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$25^3 = 15625$	$\sqrt[3]{15625} = 25$
$11^3 = 1331$	$\sqrt[3]{1331} = 11$	$26^3 = 17576$	$\sqrt[3]{17576} = 26$
$12^3 = 1728$	$\sqrt[3]{1728} = 12$	$27^3 = 19683$	$\sqrt[3]{19683} = 27$
$13^3 = 2197$	$\sqrt[3]{2197} = 13$	$28^3 = 21952$	$\sqrt[3]{21952} = 28$
$14^3 = 2744$	$\sqrt[3]{2744} = 14$	$29^3 = 24389$	$\sqrt[3]{24389} = 29$
$15^3 = 3375$	$\sqrt[3]{3375} = 15$	$30^3 = 27000$	$\sqrt[3]{27000} = 30$

किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड तीन बार आता है। तो वह एक पूर्ण घन बन जाती है।

$$512 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 8^3$$

$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$$

उदा. 1 The value of  $(\sqrt{4^3 + 15^2})^3$  का मान क्या है ?

- (a) 4913                      (b) 4313  
(c) 4193                      (d) 3943

हल (a)  $(\sqrt{4^3 + 15^2})^3$   
 $= (\sqrt{64 + 225})^3$   
 $= (\sqrt{289})^3$   
 $= (17)^3 = 4913$

उदा. 2 175616 का घनमूल 56 है, तो

$$\sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$$

का मान ज्ञात करें।

(a) 0.168                      (b) 62.16  
(c) 6.216                      (d) 6.116

हल According to the Question

$$= \sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{175616}{1000}} + \sqrt[3]{\frac{175616}{1000000}} + \sqrt[3]{\frac{175616}{1000000000}}$$

$$= \frac{56}{10} + \frac{56}{100} + \frac{56}{1000}$$

$$= 5.6 + 0.56 + 0.056 = 6.216$$

उदा. 3 सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक n जिसके लिए  $864n$  एक पूर्ण घन है :

- (a) 1                              (b) 2  
(c) 3                              (d) 4

हल (b)

2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

$$\therefore 864 = 2^3 \times 3^3 \times 2^2$$

For  $864n$  to be a perfect cube,  $n = 2$

उदा. 3 710 में कौन सी छोटी से छोटी संख्या जोड़ी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

- (a) 29                              (b) 19  
(c) 11                              (d) 21

हल (b) Clearly,  $\sqrt[3]{729} = 9$

$\therefore$  एक पूर्ण घन प्राप्त करने के लिए 19 को 710 में जोड़ा जाना चाहिए।