Toppersnotes®
Unleash the topper in you

राजस्थान

सहायक सांख्यिकी अधिकारी (ASO)

राजस्थान लोक सेवा आयोग (RPSC)

भाग - 3

सांख्यिकी, अर्थशास्त्र और गणित एवं कंप्यूटर

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
1	समंको का संग्रहण	1
2	वर्गीकरण तथा सारणीयन	6
3	केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप	8
4	अपकिरण तथा विषमता के माप	12
5	परिघात	19
6	सह–संबंध	22
7	प्रतीपगमन विश्लेषण	30
8	सूचकांक	38
9	काल श्रेणियों का विश्लेषण	44
10	निदर्शन	49
11	परिकल्पना परीक्षण	54
12	सांख्यिकीय संगठन	59
13	अर्थव्यवस्था के मूल सिद्धांत	63
14	मुद्रा, मुद्रा आपूर्ति और मौद्रिक नीति	68
15	मुद्रास्फीति	73
16	वित्तीय मध्यस्थ	77
17	भारत में वित्तीय बाजार (मुद्रा और पूंजी)	83
18	गरीबी	88
19	नीति आयोग	98
20	सरकारी योजनाएँ	100
21	विभिन्न बाजारों के तहत मूल्य निर्धारण	107
22	संख्या पद्धति	111
23	प्रतिशतता	118

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
24	अनुपात व समानुपात	122
25	औसत	126
26	साधारण ब्याज	130
27	चक्रवृद्धि ब्याज	133
28	करणी व घातांक	136
29	मैक्रोसोफ्ट, विण्डोस, उसके विभिन्न वर्जन व उसके मुलभुत अवयक	140
30	वर्ड प्रोसेसिंग सॉफ्टवेर	141
31	माइक्रोसॉफ्ट एक्सेल स्प्रेडशीट सॉफ्टवेर	143
32	माइक्रोसॉफ्ट पॉवर पॉइंट	149
33	इन्टरनेट	151

1 CHAPTER समंको का संग्रहण

समंकों के प्रकार

1. प्राथमिक समंक (Primary Data)
2. द्वितीयक समंक (Secondary Data)

प्राथमिक समंको के संग्रहण की विधियाँ

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान

इस विधि में अनुसंधानकर्ता स्वयं सूचना देने वालो से प्रत्यक्ष रूप से संपर्क स्थापित करता हैं। यह विधि निम्न अनुसंधानों के लिए उपयुक्त हैं।

- जिनका क्षेत्र सीमित हो और स्थानीय प्रकृति का हो।
- जहॉ समंको को गुप्त रखना हो।
- समंकों की मौलिकता पर अधिक जोर देना हो।
- जहाँ पर व्यक्तिगत रूप से उपस्थित होना आवश्यक हो।

2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान

इस विधि के अन्तर्गत प्रत्यक्ष संबंध रखने वाले व्यक्तियों से सूचना प्राप्त नही की जाती, बल्कि तृतीय पक्ष के ऐसे व्यक्तियों से सूचना प्राप्त की जाती है जो अप्रत्यक्ष रूप से स्थिति से अवगत हों।

जैसे – मजदूरों के रहन सहन की स्थिति मजदूरों से स्वयं से न पूछकर श्रमिक संघो या मिल के मालिकों से पूँछना।

यह विधि निम्न परिस्थितियों में उपयुक्त हैं।

- अनुसंधान का क्षेत्र विस्तृत हो।
- प्रत्यक्ष सूचना देने वालो से व्यक्तिगत संपर्क न हो।
- सूचना देने वाला सूचना देने में रूचि नहीं रखता हो।
- समंक जटिल प्रकृति के हो।

3. संवाददाताओं द्वारा स्थानीय स्त्रोतों से सूचना प्राप्ति

इस विधि में अनुसंधानकर्ता अनुसंधान के विभिन्न स्थानों पर स्थानीय संवाददाताओं की नियुक्ति करता हैं तथा उनको नियमित रूप से आवश्यक जानकारी भेजने के निर्देश दिये जाते हैं जिसके आधार पर ये समय–समय पर अनुसंधानकर्ताओं को सूचना देते हैं।

यह विधि निम्न स्थितियों में उपयुक्त हैं –

1. नियमित रूप से पर्याप्त समय तक सूचना प्राप्त करनी हो।
2. उच्च स्तर की शुद्धता की आवश्यकता नहीं हो।
3. अनुमान व प्रवृत्तियाँ ही ज्ञात करनी हो।

4. सूचकों द्वारा अनुसूचियॉ भरवाकर सूचना प्राप्ति/ड़ाक

इस विधि के अन्तर्गत अनुसंधानकर्ता अनुसंधान के उद्देश्य को ध्यान में रखकर संबंधित प्रश्नों की एक अनुसूची (प्रश्नावली) तैयार करता हैं फिर उस अनुसूची की की प्रतियाँ तैयार कर डाक द्वारा सूचना देने वालो के पास भेज देता हैं जो उसको भरकर निर्धारित समय में अनुसंधानकर्ता को वापस लौटा देते हैं। यह विधि निम्न क्षेत्रों में काम में ली जाती हैं –

- विस्तृत अनुसंधान का क्षेत्र हों।
- जहाँ की जनता साक्षर हों।
- उपभोक्ताओं की रूचियों का अनुसंधान, बाजार सर्वेक्षण इसके अन्तर्गत किया जाता हैं।
- उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण के लिए यह विधि काम में ली जाती हैं।

5. प्रगणकों द्वारा अनुसूचियों को भरकर सूचना प्राप्ति

इस विधि के अन्तर्गत अनुसंधान के विभिन्न पहलुओं को ध्यान में रखते हुये अनुसूचियाँ तैयार की जाती हैं तथा अनुसंधान के क्षेत्र को अनेक भागों में विभक्त कर प्रत्येक भाग के लिए प्रगणको की नियुक्ति कर देता हैं, जो घर–घर जाकर सूचकों से पूछताछ करके स्वयं अनुसूचियों को भरते हैं।

द्वितीयक समंकों का संग्रहण

1. प्रकाशित स्त्रोत

(i) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन
(ii) सरकारी प्रकाशन
(iii) अर्द्ध–सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन तथा प्रतिवेदन
(iv) समितियों एवं आयोगों के प्रतिवेदन
(v) व्यापारिक संस्थाओं के प्रतिवेदन
(vi) विश्वविद्यालयों का शोध कार्य
(vii) पत्र पत्रिकाएँ
(viii) बाजार समाचार
(ix) व्यक्तिगत अनुसंधानकर्ता
(x) संघो व संगठनों के प्रकाशन

Unleash the topper in you

2. अप्रकाशित स्त्रोत

अप्रकाशित रूप से भी द्वितीयक समंक उपलब्ध हो जाते हैं। अनुसंधानकर्ता विभिन्न उद्देश्यों से सामग्री संकलित करते हैं जो प्रकाशित नहीं करायी जाती। अप्रकाशित सामग्री व्यक्तियों या व्यापारिक संघों के सदस्यों के निजी उपयोग के लिए ही होती हैं।

संगणना एवं प्रतिदर्श अनुसंधान

(Census and Sample Investigation)

संगणना अनुसंधान – (Census Investigation)

यदि समग्र की प्रत्येक इकाई के बारे में सूचना संग्रहीत की है तो ऐसे अनुसंधान को संगणना अनुसंधान कहते हैं।

प्रतिदर्श अनुसंधान (Sample)

यदि समग्र की सभी इकाइयों में से मात्र कुछ प्रतिनिधि इकाइयों के विषय में सूचना संग्रहीत की जाती हैं तो उसे प्रतिदर्श अनुसंधान कहते हैं।

प्रतिदर्श या प्रतिचयन की विधियाँ (Method of Sampling)

1. **सविचार प्रतिचयन**

   इस विधि में अनुसंधानकर्ता अपने ज्ञान, प्रशिक्षण चातुर्य एवं अनुभव के आधार पर कुछ ऐसी इकाइयों का प्रतिदर्श छाँटता हैं जो उसकी राय में समस्त समग्र की विशेषताओं का उचित रूप से प्रतिनिधित्व करती हैं।

2. **दैव प्रतिचयन (Random Sampling)**

   इस विधि में समग्र की इकाईयाँ सही प्रकार से छाँटी जाती है कि प्रत्येक इकाई के प्रतिदर्श में सम्मिलित होने की संभावना बराबर होती हैं। प्रतिदर्श में इकाइयों का चयन पूर्णतया संभावना या संयोग (Chance) पर होता हैं।

   दैव प्रतिचयन की विधियाँ

   - लॉटरी विधि (Lottery Method)
   - ढ़ोल विधि (By Rotating Drum)
   - दैव संख्याओं द्वारा (By Random)
   - व्यवस्थित दैव प्रतिचयन विधि द्वारा (By Systematic Random Sampling)

3. **मिश्रित प्रतिचयन – (Mixed Sampling)**

   इस वर्ग में ऐसी विधियों को शामिल किया जाता हैं जो सविचार प्रतिचयन विधि एवं दैव प्रतिचयन विधि के सम्मिश्रण पर आधारित हों।

   इस विधि में निम्न को शामिल किया जाता हैं।

   - स्तरीय प्रतिचयन – सविचार और दैव दोनों शामिल हैं।
   - बहुस्तरीय प्रतिचयन – बहुत बड़े क्षेत्र में प्रतिदर्श लेने में उपयुक्त है।
   - बहुचरण प्रतिचयन – दैव प्रतिचयन विधि से प्रतिदर्श लिया जाता हैं।
   - समूह प्रतिचयन – इसमें समग्र को आकार, गुणो, क्षेत्रों से विभाजित किया जाता हैं।

प्रायिकता सिद्धान्त तथा दैव प्रतिचयन

दैव प्रतिचयन प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित हैं । प्रायिकता किसी अनिश्चित घटना के घटित होने या न होने की संभावना पर आधारित हैं।

घटना के घटित होने की प्रायिकता $= P = \frac{M}{M+N}$

घटना के घटित न होने की प्रायिकता $= q = \frac{N}{M+N}$

प्रायिकता = अनुकूल घटनाओं की संख्या / समस्त घटनाओं की कुल संख्या

नोट – प्रायिकता का निश्चित स्थिति में मान (1) होता हैं तथा अनिश्चित में (0) होता है।

महांक जड़ता का नियम

इस नियम को बड़ें समंकों की स्थिरता का सिद्धान्त के नाम से भी जाना जाता हैं। यह नियम यह बताता हैं कि छोटे समूह की अपेक्षा बड़े समूह से अधिक स्थिरता होती हैं।

समंको का संपादन एवं साख्यिकीय विभ्रम

(Editing of Collected Data & Statistical error)

सांख्यिकीय विभ्रमों के प्रकार

1. अभिनत विभ्रम (Biased Error)
2. अनभिनत विभ्रम (Unbiased Error)

1. **अभिनत विभ्रम**

   जो विभ्रम सूचना देने वालों की पक्षपात की भावना से अथवा माप यंत्रों के त्रुटिपूर्ण होने के कारण होते हैं उन्हें अभिनत विभ्रम कहते हैं।

   ये त्रुटियँ एक ही दिशा में बढ़ती जाती हे। अतः इन्हें संचयी विभ्रम भी कहते है।

   जैसे – नवयुवतियाँ अपनी उम्र जानबूझकर कम बताती हैं।

   अभिनत विभ्रम के कारण

   i. सूचना देने वालो का पक्षपात
   ii. प्रगणको का दोष
   iii. प्रतिदर्श की अभिनति
   iv. दोषपूर्ण मापदंड़
   v. दोषपूर्ण निर्वचन

2. **अनभिनत विभ्रम**

   ये विभ्रम बिना किसी पक्षपात के उत्पन्न होते हैं। ये विभ्रम असावधानी के कारण समंकों में संयोगवश उत्पन्न होते हैं। इन्हें क्षतिपूरक विभ्रम भी कहते हैं।

   सांख्यिकी विभ्रमों का माप

   i. निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error)
   ii. सापेक्ष विभ्रम (Relative Error)

i. **निरपेक्ष विभ्रम**

- वास्तविक मूल्य तथा अनुमानित मूल्य के अन्तर को निरपेक्ष विभ्रम कहते हैं।
- वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से ज्यादा तो धनात्मक नहीं ऋणात्मक विभ्रम होता है।

A.E = a-e

a = Actual Value

e = Estimated Value

ii. **सापेक्ष विभ्रम**

$$\text{सापेक्ष विभ्रम (R.E.)} = \frac{Actual\ Error}{Estimated\ Value}\ or\ \frac{A.E}{e} = \frac{a-e}{e}$$

प्रतिशत विभ्रम – सापेक्ष विभ्रम को 100 से गुणा करें तो प्राप्त परिणाम प्रतिशत विभ्रम कहलाता हैं।

$$\frac{A.E}{e} \times 100$$

Actual Value = ?

उदाहरण = सापेक्ष विभ्रम = 0.75, निरपेक्ष विभ्रम 60

$$Relative\ error = \frac{A.E}{e} = 0.75 = \frac{60}{e} = e = \frac{60}{75} \times 100 = 80$$

$$\text{Actual Value } 80 + 60 = 140$$

त्रुटियों का अनुमान

- जब विभ्रम अभिनत हो निरपेक्ष = Avg. Absolute error X N

  सापेक्ष :– $\frac{Avg.\ Absolute\ error \times N}{Eastimated\ Value}$
- जब विभ्रम अनभिनत हों

  निरपेक्ष विभ्रम = Avg. Absolute error × $\sqrt{N}$

  सापेक्ष = $\frac{Avg.\ Absolute\ error \times \sqrt{N}}{Estimated\ value}$
- बाउले के अनुसार

  कुल निरपेक्ष विभ्रम = $\frac{2}{3} \times \frac{Avg.\ Absolute\ error}{\sqrt{N}}$

प्रतिचयन सिद्धान्त एवं प्रतिदर्शी – बंटन (Sampling theory and Sempling Distributions)

समष्टि एवं प्रतिदर्श (Population and Sample)

सांख्यिकी में 'समष्टि' का तात्पर्य किसी अनुसंधान क्षेत्र की सभी इकाईयों से हैं।

जैसे – विश्वविद्यालय में विद्यार्थियों की कुल संख्या, पुस्तकालयों में पुस्तकों की संख्या आदि।

समष्टि (Population) के प्रकार

(i) परिमित – जिसकी इकाइयॉ सुनिश्चित होती हैं।

(ii) अपरिमित – इकाईयों की संख्या अनिश्चित होती हैं।

प्रतिदर्श (Sample)

समष्टि की विभिन्न इकाइयों में से प्रतिदर्श चुना जाता हैं प्रतिदर्श समष्टि की इकाईयों का वह अंश हैं जो पूर्ण समष्टि के अध्ययन हेतु चुना जाता हैं।

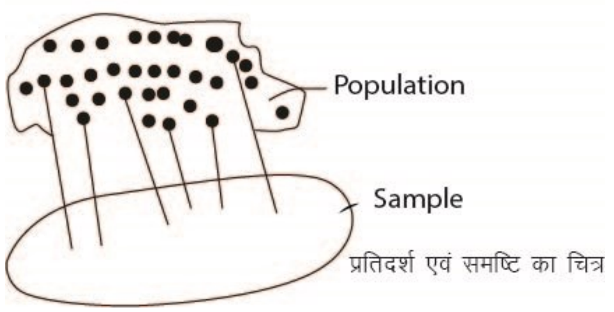
प्रतिदर्श में से चुनी गयी इकाइयॉ प्रतिदर्श इकाइयॉ कहलाती हैं।

प्राचल एवं प्रतिदर्शज (Parameter and Statistic)

समष्टि की सभी इकाइयों के सांख्यिकीय मान प्राचल कहलाते हैं जबकि समष्टि से चुने गये प्रतिदर्श की इकाइयों के अभिलक्षणों से निकाले गये सांख्यिकी माप प्रतिदर्शज कहे जाते हैं।

प्राचल और प्रतिदर्शज के लिए निम्न संकेत प्रयोग किये जाते हैं।

माप	समष्टि प्राचल (Parameter)	प्रतिदर्शज (Stalistic)
आकार (Size)	N	n
माध्य (Mean)	μ	$\overline{X}$
मानक विचलन (S. Deviation)	σ	s
अनुपात (Proportion)	P	P



प्रतिदर्श एवं समष्टि का चित्र

प्रतिचयन की विधियाँ (Methods of Samplings)

1. **सरल दैव/अनियमित /प्रायिक प्रतिचयन (Simple Random Sampling)**

   सरल अनियमित प्रतिचयन वह विधि हैं जिसके अनुसार समष्टि की प्रत्येक इकाई के प्रतिदर्श में शामिल होने की संभावना रहती हैं तथा सभी प्रतिदर्शो के चुने जाने की प्रायिकता समान होती हैं।

इसके निम्न तीन तत्व होते हैं –

(i) प्रत्येक इकाई के चुने जाने की समान प्रायिकता होती हैं –
जैसे पहली इकाई के चयन की प्रायिकता होगी $= \frac{1}{N}$
दूसरी $= \frac{1}{N-1}$
तीसरी $= \frac{1}{N-2}$

(ii) इकाईयॉ चयन से परस्पर स्वतंत्र होती हैं।

(iii) सभी संभावित प्रतिदर्शों के चुने जाने की समान संभावना होती हैं।

2. स्तरित प्रतिचयन (Stratified Sampling)

स्तरीय प्रतिचयन अनियमित प्रतिचयन की वह विधि हैं जिसके अनुसार समष्टि की समग्र इकाईयों का चयन नहीं किया जाता बल्कि समष्टि को सजातीय स्तरों में बॉंटकर प्रतिदर्श इकाई चुनी जाती हैं।

सजातीयता – आर्थिक–सामाजिक, भौगोलिक

स्तरीय प्रतिचयन के गुण

(i) यह समष्टि का सर्वाधिक प्रतिनिधित्व करता हैं।

(ii) इसके द्वारा चुने गये प्रतिदर्श में सर्वाधिक शुद्धता होती हैं।

(iii) इससे समय, व्यय में कमी और प्रशासनिक सुविधा भी रहती हैं।

3. क्रमबद्ध प्रतिचयन (Systematic Sampling)

इस विधि के अनुसार प्रतिदर्श की प्रथम इकाई का चयन समष्टि में से दैव/अनियमित रूप से किया जाता हैं तथा शेष इकाईयॉ एक समान अन्तराल पर स्वतः ही प्रतिदर्श में शामिल कर ली जाती हैं।

उदाहरण

यदि N =1000 में से n =100 का क्रमबद्ध प्रतिदर्श चुनना हो तो

$$K = \frac{N}{n} = \frac{1000}{100} = 100$$

जहाँ समष्टि परिमित/निश्चित हो और इकाइयाँ कालनानुसार, भौगोलिक या संख्यात्मक आधार पर हो तो वहाँ पर यह विधि उपयुक्त होती हैं।

4. गुच्छ/समूह,/झुंड़ प्रतिचयन (Cluster Sampling)

इस विधि के अनुसार समष्टि को कुछ निश्चित गुच्छो या उप–वर्गों में विभाजित करके सरल प्रतिदर्श चुना जाता हैं। इस विधि से चयनित गुच्छों की सभी इकाइयों को प्रतिदर्श में शामिल किया जाता हैं।

5. बहुचरणी/बहुस्तरीय प्रतिचयन (Multistage Sampling)

इस विधि के अनुसार प्रतिदर्श इकाइयॉ दो या तीन चरणों से चयनित की जाती हैं। सर्वप्रथम प्रथम चरण की इकाइयों में बॉटकर दैव आधार पर प्रतिदर्श निकाला जाता है फिर दूसरे चरण के उप प्रतिदर्श चयनित किये जाते हैं।

प्रतिदर्श और गैर प्रतिदर्शी त्रुटियाँ

1. प्रतिदर्शी त्रुटि – (Sampling Errors)

समष्टि में प्रतिदर्श के आधार पर निष्कर्ष निकाले जाते हैं। कुछ चुनी हुई इकाइयों की सहायता से सम्पूर्ण समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालने में होने वाली त्रुटि प्रतिदर्शी त्रुटि कहलाती हैं।

ये त्रुटियाँ दो प्रकार की होती हैं –

(1) अभिनत
(2) अनभिनत

- **अभिनत** – पक्षपातपूर्ण चयन, दोषपूर्ण विश्लेषण आदि से उत्पन्न होती हैं।
- **अनभिनत** – ये त्रुटियाँ संयोगवश या दैव रूप से उत्पन्न होती हैं। ये त्रुटि क्षतिपूरक प्रकृति की होती हैं।

2. गैर प्रतिदर्शी त्रुटियाँ (Non- Sampling Errors)

ये त्रुटियाँ समंको के अवलोकन, विश्लेषण, प्रसंस्करण में होने वाली त्रुटियों या विसंगतियों के कारण उत्पन्न होती हैं।

परिकल्पना – परीक्षण (Testing of Hypothesis)

सामान्यतयाः किसी तथ्य के संबंध में की गयी मान्यता को परिकल्पना कहते हैं जो जाँच करने पर सही या गलत हो सकती हैं।

उदाहरण – एक सिक्का 100 बार उछाला जाता है। वह 60 बार चित्त 40 बार पट गिरता हैं। इस प्रयोग के आधार पर हम कह सकते हैं कि सिक्का सुड़ोल हैं।

परिकल्पना – परीक्षण की प्रक्रिया

1. परिकल्पना का प्रतिपादन
2. उपयुक्त सार्थकता स्तर का निर्धारण
3. उपयुक्त परीक्षण प्रतिदर्शज का निर्धारण – इसे क्रान्तिक मान भी कहते हैं।

$$\text{परीक्षण प्रतिदर्शज} = \frac{\text{प्रतिदर्शज - परिकल्पित प्राचल}}{\text{प्रतिदर्श की प्रमाप त्रुटि}}$$

4. परिकल्पना–परीक्षक प्रक्रिया को 2 भागों में बाँटा जाता हैं – स्वीकरण क्षेत्र और अस्वीकरण क्षेत्र। यदि स्वीकरण क्षेत्र में पड़ता हैं तो परिकल्पना स्वीकार की जाती हैं और यदि अस्वीकरण क्षेत्र में पड़ता हैं तो H_0 अस्वीकृत कर दिया जाता हैं।
5. आवश्यक परिकलन कार्य का निष्पादन
6. निष्कर्ष निकालना तथा निर्णय लेना

परिकल्पना परीक्षण में त्रुटियाँ

ये चार प्रकार की होती हैं।

(i) शून्य परिकल्पना (H_o) सत्य हैं परन्तु परीक्षण उसे अस्वीकार करता हैं (Type I[st] Error P=a)

(ii) शून्य परिकल्पना (H_o) असत्य हैं परनतु परीक्षण उसे स्वीकार करता हैं। (Type II[nd] Error P=B)

(iii) शून्य परिकल्पना (H_o) सत्य है परीक्षण उसे स्वीकार करता हैं। Corrent Decision, P=(1-a)

(iv) शून्य परिकल्पना (H_o) असत्य हैं और परीक्षण उसे अस्वीकार करता हैं।

Correct Decision P = (1-B)

अतः स्पष्ट है कि प्रथम दो संभावनाओं से प्रथम कोटि तथा द्वितीय कोटि की त्रुटियाँ उत्पन्न होती हैं।

परिकल्पना परीक्षण और Z के क्रांतिक मूल्य

वैकल्पिक परिकल्पना का चिन्ह	परीक्षण का प्रकार	सार्थकता स्तर पर Value of Z		
		0.01 or (1%)	0.05(1%)	0.10 or (10%)
$\neq$	द्वि पुच्छ (Two Tail)	± 2.58	± 1.96	± 1.645
$>$	दायाँ पुच्छ	$+2.33$	$+1.645$	$+1.282$
$<$	वाम पुच्छ	-2.33	-1.645	-1.282

सार्थकता परीक्षण – बड़े प्रतिदर्श

(Test of Significance – Large Sample)

सार्थकता परीक्षण की प्रक्रिया

1. परिकल्पना स्थापित करना

माध्य के सार्थकता परीक्षण के लिए निम्न प्रकार शून्य तथा वैकल्पिक परिकल्पनायें प्रस्थापित की जाती हैं।

स्थिति	शून्य परिकल्पना H_o	वैकल्पिक परिकल्पना H_a
समष्टि का विनिर्दिष्ट परिकल्पित माध्य मूल्य (μ_0) हैं ।	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_a: \mu \neq \mu_0$ (द्विपुच्छ)
प्रतिदर्श बड़े समष्टि से चयनित द्ध और प्रमाप विचलन σ हैं ।	$H_0: \overline{X} - \mu_0 = 0$	$H_a: \overline{X} \neq \mu_0$ (द्विपुच्छ)
समष्टि से चयनित दो बड प्रतिदर्शों के माध्यों में अन्तर की सार्थकता का परीक्षण	$H_0: \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 0$	$H_a: \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \neq 0$ or $H_a: X_1 \neq \overline{X}_2$ (द्विपुच्छ)

2. सार्थकता स्तर निर्धारण

सार्थकता स्तर a यह बताता हैं कि अन्तर की प्रायिकता अधिक हैं या कम। व्यवहार में यह स्तर 5% (0.05) या 1% (0.01%) पर पूर्व निर्धारित किया जाता हैं।

3. परीक्षण प्रतिदर्श का निर्धारण

बड़े प्रतिदर्शों के लिए सार्थकता परीक्षण हेतु निम्न सूत्र के अनुसार क्रांतिक मान Z का निर्धारण किया जाता हैं।

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$$

4. क्रांतिक क्षेत्र निर्धारित करना

5. आवश्यक परिकलन कार्य निष्पादित करना – प्रतिदर्श का मान, प्रतिदर्श की प्रमाप त्रुटि और z का मान परिकलित किया जाता हैं।

6. निर्णय लेना – यदि पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर पर |z| का परिकलित मान |z| के सारणी मान से कम हैं तो स्वीकरणीय क्षेत्र में पड़ता हैं। यदि |z| का मान क्रांतिक मान से अधिक हैं तो वह अस्वीकरण क्षेत्र में पड़ता हैं।

नोट – बड़ा प्रतिदर्श :– सदस्यों की संख्या 30 से ज्यादा हो (N>30)

छोटा प्रतिदर्श :– 30 से कम हों (N<30)

2 CHAPTER वर्गीकरण तथा सारणीयन

वर्गीकरण (Classification)

वर्गीकरण तथ्यों को उनकी समानता तथा सदृश्यता के अनुसार समूहों या वर्गों में क्रमबद्ध करने की क्रिया हैं।

वर्गीकरण के उद्देश्य

1. **सरल एवं संक्षिप्त बनाना**
   वर्गीकरण का मुख्य उद्देश्य सांख्यिकी सामग्री की जटिलता को दूर करके उसको सरल व संक्षिप्त बनाना हैं।
2. **समानता व असमानता को दूर करना**
   वर्गीकरण से तथ्यों की समानता स्पष्ट हो जाती है, समान गुण वाले समंक एक साथ रखे जाते हैं, जैसे – 'साक्षर' निरक्षर विवाहित – अविवाहित आदि।
3. **तुलना मे सहायक**
   वर्गीकरण से समंकों का तुलनात्मक विवेचन सरल हो जाता हैं।
4. **तर्कपूर्ण व्यवस्था करना**
   वर्गीकरण एक तर्कसंगत क्रिया हैं जिसके आँकड़े नियमित और वैज्ञानिक ढंग से प्रस्तुत किये जाते हैं।
5. **सारणीयन का आधार प्रस्तुत करना**
   वर्गीकरण द्वारा सारणीयन तथा विश्लेषण की अन्य क्रियाओं का आधार प्रस्तुत किया जाता हैं।

वर्गीकरण की रीतियाँ (Methods of Classification)

सांख्यिकी तथ्य दो प्रकार के होते हैं।

(i) वर्णात्मक

(ii) अंकात्मक

वर्णात्मक तथ्यों का प्रत्यक्ष माप नहीं किया जाता । केवल उपस्थिति और अनुपस्थिति के आधार पर गणना की जा सकती हैं।

वर्गीकरण की विधियाँ हैं

वर्गीकरण की दो विधियाँ है।

1. **गुणात्मक वर्गीकरण**
   जब तथ्यों को वर्णात्मक या गुणो के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है तो वह विभाजन गुणात्मक वर्गीकरण कहलाता हैं।
   जैसे – धर्म, व्यवसाय, जाति के आधार पर
   यह दो प्रकार का होता हैं।
   (i) द्वन्द्व भाजन वर्गीकरण – जब एक गुण की उपस्थिति या अनुपस्थिति के आधार पर तथ्यों को दो भागों में विभाजित किया जाता हैं तो ऐसे विभाजन को द्वन्द्व विभाजन वर्गीकरण कहते हैं।
   (ii) बहुगुण वर्गीकरण – इसमें तथ्यों को एक से अधिक गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता हैं।
2. **संख्यात्मक वर्गीकरण/वर्गान्तरों के अनुसार**
   इसमें निम्न शब्दों का प्रयोग किया जाता हैं।
   (i) वर्ग सीमायें
   प्रत्येक वर्ग दो सीमाओं से बनता है जिन्हें वर्ग सीमायें कहते हैं– निचली सीमा तथा ऊपरी सीमा।
   (ii) वर्ग विस्तार
   ऊपरी सीमा और निचली सीमा के अन्तर को वर्ग विस्तार कहते हैं $L_2 - L_1$।
   (iii) मध्य मूल्य
   $$= \frac{L_1 + L_2}{2}$$
   (iv) वर्ग आकृति – वर्ग की आवृति होती है।

सारणीयन (Tabulation)

- सारणीयन समंको को खानों और पंक्तियों के रूप में प्रस्तुत करने की प्रक्रिया हैं।
- सारणीयन वर्गीकृत आँकड़ों को सरल और संक्षिप्त करने के लिए सारणियों में प्रस्तुत करने की प्रक्रिया हैं।

सारणी के मुख्य भाग

1. **सारणी शीर्षक**
   सबसे पहले सारणी का शीर्षक होता हैं जिससे समंको की प्रकृति क्षेत्र, समय आदि के बारे में सूचना मिलती हैं।
2. **खानों व पंक्तियों के अनुशीर्षक**
   लम्बवत् खानों के अनुशीर्षक तथा क्षैतिज पंक्तियों के अनुशीर्षक स्पष्ट व संक्षिप्त होते हैं।
3. **रेखा खींचना तथा रिक्त स्थान छोड़ना**
   सारणी का आकर्षण बहुत कुछ उचित रेखा खींचने तथा उपयुक्त रिक्त स्थान छोड़ने पर निर्भर करता हैं।
4. **पदों की व्यवस्था**
   सारणी के प्रारूप में खानों व पंक्तियों को उचित ढ़ंग से क्रमबद्ध किया जाता हैं।
5. **टिप्पणियाँ**
   यह सारणी के नीचे लिखी जाती हैं।
6. **उदगम**
   प्रत्येक सारणी के अंत में समंको के संदर्भ व उद्‌गम दिये जाते हैं।

Unleash the topper in you

सारणियों के प्रकार

1. उद्देश्य के आधार पर

(i) **सामान्य उददेश्य वाली सारणी** – इस सारणी का प्राथमिक उद्देश्य समंको को इस प्रकार प्रस्तुत करना होता है कि व्यक्तिगत इकाइयाँ पाठक द्वारा तुरन्त ढूँढ़ी जा सके।

(ii) **विशेष उद्देश्य वाली सारणो** – ये किसी विशेष उद्देश्य के लिए सामान्य उद्देश्य वाली सारणियों की सहायता से तैयार की जाती हैं। ये सारणी अपेक्षाकृत छोटी होती हैं।

2. मौलिकता के आधार पर

(i) मौलिक या प्राथमिक सारणी – इस सारणी में समंक उसी मौलिक रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं जिससे वो एकत्रित किये गये थे।

(ii) व्युत्पन्न सारणी – इसमें मौलिक समंको को प्रस्तुत नहीं किया जाता बल्कि उनके आधार पर निकाले गये योग, प्रतिशत, अनुपात, माध्य आदि को प्रस्तुत किया जाता हैं।

3. रचना के आधार पर

(i) **सरल या एक गुण वाली सारणी** – इस सारणी में समंकों की केवल एक ही विशेषता या गुण को शामिल किया जाता हैं।

(ii) **जटिल सारणी** – इसमें एक से अधिक गुणो को शामिल किया जाता हैं।

(a) **द्विगुण सारणी** – इसमें समंको की दो विशेषताओं का प्रदर्शन किया जाता हैं।

(b) **त्रिगुण सारणी** – इस सारणी में तीन गुणों को शामिल किया जाता हैं। जैसे विद्यार्थियों की संख्या का ज्ञान, लिंग तथा निवास

(c) **बहुगुण सारणी** – इस प्रकार की सारणी में समंको के अनेक गुणो का एक साथ प्रस्तुतीकरण किया जाता हैं।

यांत्रिक सारणीयन (Mechnical Tabulation)

जब अनुसंधान का क्षेत्र बहुत बड़ा होता है तथा अधिक समंक होते हैं तो यंत्रों द्वारा सारणीयन किया जाता हैं।

यांत्रिक सारणी की प्रक्रिया

(i) **संकेतांकों में बदलना** – सबसे पहले प्रश्नावली में प्रविष्ट सूचना को संकेतांको में बदला जाता हैं।

(ii) **संकेतांकों को कार्ड़ो पर लिखना** – प्रत्येक कार्ड में 0–9 तक के अंक होते है तथा अनेक कॉलम होते हैं। सूचना से संबंधित संकेतांको को 'की पंच' द्वारा काटकर छेद किया जाता हैं।

(iii) **परीक्षण** – सूचना जाँच के बाद त्रुटियों की जाँच करने के लिए एक परीक्षण पंच द्वारा यह देख जाता हैं कि छेद ठीक किये गये हैं या नहीं।

(iv) **कार्डो का छाँटना** – कार्डो को उनके गुणों के अनुसार बिजली के छाँटने वाले यंत्र में डालकर अलग कर लिया जाता हैं।

(v) **सारणीयन** – अन्त में छटे हुये कार्ड़ो की यंत्र द्वारा गणना करके सारणीयन यंत्रों की सहायता से सारणियाँ तैयार की जाती हैं।

नोट - द्विचर आवृति सारणी

समान पदो की संख्या को दो चर मूल्यों के माप के आधार पर जिस आवृति सारणी में प्रस्तुत किया जाता है उसे द्विचर आवृति सारणी कहते हैं।

Unleash the topper in you

3 CHAPTER केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Central Tendency)

सांख्यिकी माध्यों के प्रकार

1. **स्थिति संबंधी माध्य**
   (i) बहुलक
   (ii) माध्यिका
2. **गणितीय माध्य**
   (i) समान्तर माध्य
   (ii) गुणोत्तर माध्य
   (iii) हरात्मक माध्य
   (iv) वर्गकरणी या द्वितीय माध्य
3. **व्यापारिक माध्य**
   (i) चल अथवा गतिमान माध्य
   (ii) प्रगामी या संचयी माध्य
   (iii) संग्रहीत माध्य

1. स्थिति संबंधी माध्य

(i) बहुलक (Mode)

- Mode शब्द फ्रेंच भाषा के La Mode से लिया गया हैं। जिसका अर्थ हैं रिवाज या फैशन।
- सांख्यिकी में बहुलक उस मूल्य को कहते हैं जो समंकमाला मे सबसे अधिक बार आता हैं।

अखंड़ित श्रेणी में बहुलक

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_3} \times i$$

बहुलक के गुण

1. दैनिक प्रयोग की वस्तुओं जैसे जूते, सिले सिलाये कपड़ो आदि के संबंध में औसत आकार का तात्पर्य बहुलक से ही होता हैं।
2. चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव –
3. बहुलक का मूल्य रेखाचित्र बनाकर भी निर्धारित किया जा सकता हैं।
4. बहुलक श्रेणी का सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व करता हैं।

(ii) माध्यिका (Median)

किसी श्रेणी के आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है वहीं माध्यिका कहलाता हैं।

माध्यिका का निर्धारण

1. **व्यक्तिगत श्रेणी** – आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित करेंगे।

   माध्यिका $(M) = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ संख्या (जब N विषम संख्या है।)

   $(M) = \left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ तथा $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{th}$ का औसत जब N = सम संख्या हो।

   सूत्र = $M\left(\frac{N+1}{2}\right)^{th\ \ Item}$
2. **खंडित श्रेणी** – सबसे पहले संचयी आवृत्ति ज्ञात करेंगे।

   माध्यिका $= M = \frac{N+1}{2}$
3. **अखंड़ित श्रेणी**
   सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति ज्ञात की जाती हैं।
   = $\frac{N}{2}$ वाँ मान (समावेशी श्रेणी हैं तो अपवर्जी में बदला जायेगा)

   माध्यिका $= (M) = L_1 + \frac{i}{F}(m - c)$

   L_1 – निचली सीमा i = वर्ग अन्तराल

   F = माध्यिका वर्ग की बारम्बारता

   m = मध्यका संख्या (N/2)

   c = माध्यिका वर्ग से ऊपरी वर्ग की संचयी बारम्बारता

माध्यिका के लाभ

1. चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव।
2. रेखाचित्र खींचकर भी माध्यिका का निर्धारण किया जा सकता हैं।
3. माध्यिका एक निश्चित एवं स्पष्ट माध्य हैं। बहुलक की तरह अनिश्चित नहीं हैं।
4. ऐसे तथ्य जो प्रत्यक्ष रूप से मापनीय हो, उनमे माध्यिका सर्वोत्तम होती हैं। जैसे – बौद्धिक स्तर, स्वास्थ्य, दरिद्रता आदि।

विभाजन मूल्य (चतुर्थक, दशमक, अष्ठमक, शतमक)

माध्यिका श्रेणी को दो बराबर भागों मे विभाजित करता हैं। एक समंक माला में 3 चतुर्थक, 4 पंचमक, 7 अष्टमक, 9 दशमक व 99 शतमक होते हैं जिनमें से दूसरे चतुर्थक, चौथे अष्टमक, पाँचवे दशमक, पचासवे शतमक का मूल्य माध्यिका मूल्य के बराबर होता हैं।

विभाजन मूल्यों का निर्धारण

व्यक्तिगत तथा खंड़ित श्रेणी

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ वाँ मान $\quad Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ वाँ मान

$D_3 = \frac{3(N+1)}{10}$ वाँ मान $\quad D_7 = \frac{7(N+1)}{10}$ वाँ मान

$O_1 = \frac{N+1}{8}$ वाँ मान $\quad O_7 = \frac{7(N+1)}{8}$ वाँ मान

अखंड़ित श्रेणी

इस श्रेणी में (N+1) के स्थान पर N/2 का प्रयोग किया जाता हैं।

$Q_1 = \frac{N}{4}$ वाँ मान

$Q_1 = L_1 + \frac{i}{F}(q_1 - c)$

$Q_3 = \frac{3N}{N}$ वाँ मान

$Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}(q_3 - c)$

$D_1 = \frac{N}{10}$ वाँ मान

$P_{98} = \frac{98\,N}{100}$ वाँ मान

अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण करना

दिया है – $M = 27,\ Z = 26$, वर्ग अंतराल (20–30)

0–10	3	3
10–20	?	11
20–30	20	31
30–40	12	43
40–50	?	43+?

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_2 - f_2} \times i$$

$$= 26 = 20 + \frac{20 - f_0}{40 - f_0 - 12} \times 10$$

$$= 26 - 20 = \frac{200 - 10f_0}{28 - f_0}$$

$$= 6(28 - f_0) = 200 - 10f_0$$

$$= 168 - 6f_0 = 200 - 10f_0$$

$$= 10f_0 - 6f_0 = 200 - 168$$

$$4\ f_0 = 32, \quad f_0 = \frac{32}{4} = 8$$

$$M = L_1 + \frac{i}{f}(m - c) \gg 27 = 20 + \frac{10}{20}(m - 11)$$

$$\gg 27 - 20 = \frac{1}{2}(m - 11) \qquad \gg 7 = \frac{1}{2}(m - 11)$$

$$m = 14 + 11 = 25 = \frac{N}{2}$$

$$14 = m - 11$$

अतः $N = 2 \times 25 = 50$

$40 - 50$ वर्ग की आवृत्ति = 50-43= 7

समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

- गणितीय माध्यों में सर्वाधिक लोकप्रिय समान्तर माध्य हैं। किसी समंकमाला का समान्तर माध्य वह मूल्य हैं जो उस श्रेणी के सभी मूल्यों के योग को उनकी संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता हैं।

  समान्तर माध्य ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं।

  1. प्रत्यक्ष रीति 2. लघु विधि

1. व्यक्तिगत श्रेणी

(i) प्रत्यक्ष रीति

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

(ii) लघु रीति – कल्पित माध्य मानकर माध्य निकाला जाता है।

$$\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

2. खंड़ित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना

(i) प्रत्यक्ष रीति

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

(ii) लघु रीति

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fx}{N}$$

3. अखंड़ित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना

(i) प्रत्यक्ष रीति – इसमें सबसे पहले मध्य मूल्य निकाले जाते हैं। फिर वही प्रत्यक्ष प्रक्रिया अपनायी जाती हैं जो खंड़ित श्रेणी में अपनायी जाती हैं।

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

(ii) लघु रीति

$$A + \frac{\sum fDx}{N}$$

(iii) पद विचलन रीति

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} \times i$$

इस विधि में प्रत्यक्ष मध्य मूल्य में से कल्पित माध्य घटाकर वर्ग अन्तराल का भाग दे दिया जाता हैं। फिर वहीं प्रक्रिया अपनायी जाती हैं जो लघुरीति में अपनायी जाती हैं।

(iv) आंकलन या योग रीति

$$\overline{X} = M - i(F - 1)$$

M = अधिकतम वर्ग का मध्य बिन्दू

F = संचयी आवृत्ति के योग को कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त संख्या

$$F = \frac{\sum Cf}{N}$$

i = वर्ग अन्तराल

सामूहिक समान्तर माध्य

$$\overline{X} = \frac{\overline{X}_1 N_1 + \overline{X}_2 N_2 + \overline{X}_3 N_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

समान्तर माध्य के गुण

1. समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनो का योग शून्य (0) होता हैं।
2. समान्तर माध्य से विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम होता हैं।
3. समान्तर माध्य में किसी संख्या के जोड़ने, घटाने, भाग देने, गुणा करने पर समान्तर माध्य भी उसी रूप में बदल जाता हैं।
4. अपकिरण विषमता, सहसंबंध आदि में समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाता हैं।
5. समान्तर माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता हैं। माध्यिका व बहुलक में यह गुण नहीं पाया जाता हैं।

भारित समान्तर माध्य

$$\overline{X}_w = \frac{\sum WX}{\sum W}$$

सूचकांको निर्माण में तथा जन्म दर, मृत्यु दर, बेरोजगारी की दर, प्रतिशत प्राप्तांको आदि के तुलनात्मक अध्ययन में भारित समान्तर माध्य का विशेष रूप से उपयोग किया जाता हैं।

सामान्य एवं प्रमापित मृत्यु दरें

दो नगरो की औसत मृत्यु दरों की तुलना करने के लिए भारित समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाता हैं।

औसत मृत्यु दर दो प्रकार की होती हैं।

(i) सामान्य मृत्यु दर

$$\text{सामान्य मृत्यु दर} = \frac{\text{कुल मृत्यु संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 100$$

$$\text{आयु विशिष्ट मृत्यु दर \%} = \frac{\text{विशिष्ट आयु वर्ग में मृत्यु संख्या}}{\text{विशिष्ट आयु वर्ग की जनसंख्या}}$$

(ii) प्रमापित मृत्यु दर

गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

किसी श्रेणी का गुणोत्तर माध्य उसके सभी मूल्यों के गुणनफल का वह मूल (Root) होता हैं जितनी उस श्रेणी में इकाइयाँ हैं।

$$GM = N\sqrt{X_1 \times X_2 \times X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots X_N}$$

$$GM = Antilog\,[LogX_1 + LogX_2 + LogX_3 + \cdots \ldots.. LogX_N]$$

$$GM = Antilog\left[\frac{\sum logs}{N}\right]$$

भारित गुणोत्तर माध्य

$$WGM = Antilog\left[\frac{\sum(logX \times W)}{\sum W}\right]$$

नोट - गुणोत्तर माध्य का प्रमुख प्रयोग प्रतिशत वृद्धि दरों तथा अनुपातो का औसत निकालने में किया जाता हैं।

विशेषताएँ : जनसंख्या वृद्धि, चक्रवृद्धि ब्याज, मूल्यो मे होने वाले परिवर्तनों आदि की औसत दरे गुणोत्तर माध्य से निकाली जाती हैं।

Topper Notes
Unleash the topper in you

हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

किसी समंक श्रेणी में मूल्यों की संख्या को उनके व्युत्क्रमों के योग से भाग देने पर जो मूल्य आता हैं वह उस श्रेणी का हरात्मक माध्य कहलाता हैं।

1. व्यक्तिगत श्रेणी में हरात्मक माध्य

मूल्यों के व्युत्क्रम ज्ञात किये जाते हैं।

$$HM = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} \ldots\ldots\ldots \frac{1}{X_N}}$$

यदि व्युत्क्रम सारणी से ज्ञात किये जाते हैं तो

$$HM = Reciprocals\left[\frac{\sum Reciprocals}{N}\right]$$

2. खंड़ित व अखंडित्रत श्रेणी

$$HM = Reciprocals\left[\frac{\sum(Rec.X \times F)}{N}\right]$$

हरात्मक माध्य का उपयोग

1. औसत गति, चलन वेग, वस्तु की मात्रा प्रति रूपया के रूप में दिये गये मूल्य आदि की औसत मात्रा ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य उपयुक्त हैं।

व्यापारिक माध्य

1. **चल माध्य** – चल माध्य एक विशेष प्रकार का समान्तर माध्य हैं जिसका प्रयोग काल श्रेणी में मूल्यों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए किया जाता हैं।
2. **प्रगामी या संचयी माध्य** – इसकी गणना भी समान्तर माध्य के आधार पर की जाती हैं। इसकी गणना में प्रत्येक अगले वर्ष के मूल्य को शामिल कर लिया जाता हैं परन्तु पिछले मूल्यों को छोड़ा नहीं जाता।
3. **संग्रहित माध्य** – संग्रहित माध्य वह मूल्य हैं जो विभिन्न समान्तर माध्यों का समान्तर माध्य निकालने से ज्ञात होता हैं।

माध्यों का पारस्परिक संबंध

1. **समान्तर माध्य माध्यिका व बहुलक** – यदि आवृत्ति बंटन का एक सरल आवृत्ति वक्र बनाया जाये तो उसमें समान्तर माध्य संतुलित बिन्दु पर स्थित होता हैं। माध्यिका बिल्कुल केन्द्र में स्थित होता हैं। बहुलक वक्र के शिखर का मान होता हैं।

$$Z = 3M - 2\overline{X}$$

$$M = \frac{1}{3}(2\overline{X} + Z)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(3M - Z)$$

2. समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्यों का संबंध

$$\overline{X}\ 7GM\ 7HM$$

यदि समंक श्रेणी के सभी पद समान हो तो

$$\overline{X} = GM = HM$$

किन्ही दो मूल्यों का गुणोत्तर माध्य उनके समान्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के गुणोत्तर माध्य के बराबर होता हैं।

$$GM = \sqrt{\overline{X} \times HM}$$

या

$$GM^2 = \overline{X} \times HM$$

Toppersnotes
Unleash the topper in you

4 CHAPTER अपकिरण तथा विषमता के माप

अपकिरण तथा विषमता के माप (Measures of Dispersion)

अंकसमूहों के सभी मौलिक लक्षणों को स्पष्ट रूप से व्यक्त करने के लिए निम्न चार प्रकार के माप किये जाते हैं।

(i) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप – जिनमें अंक श्रेणी का सारांश या केन्द्रीय मूल्य ज्ञात हो जाता हैं।

(ii) अपकिरण के माप – जिनके यह पता चलता है कि श्रेणी के विभिन्न मूल्य उसके माध्य से कितनी औसत दूरी पर हैं अर्थात् उनका विखराव या फैलाव कैसा हैं।

(iii) विषमता के माप – जो यह सूचना प्रदान करते हैं कि अंको के बिखराव को दिशा क्या हैं अर्थात् आवृतियाँ कम मूल्यों की ओर है या अधिक मूल्यों की ओर।

(iv) पृथुशीर्षत्व के माप – जो आवृत्तियों के नुकीलेपन या चपटेपन के माप होते हैं। इनसे यह ज्ञात होता हैं कि बंटन के केन्द्र में पदों का जमाव अधिक हैं या कम।

अपकिरण (Dispersion)

डॉ. बाउले – अपकिरण पदों के विचरण या अंतर का माप हैं।
स्पीगेल – वह सीमा जहाँ तक समंक एक माध्य मूल्यों के दोनो ओर फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं उन समंकों का अपकिरण कहलाती हैं।
बुक्स एवं डिक – एक केन्द्रीय मूल्य के दोनों ओर पाये जाने वाले चरम मूल्यों के प्रसार की सीमा ही अपकिरण हैं।

- अपकिरण के माप द्वितीय श्रेणी के माध्य कहलाते हैं।
- अपकिरण श्रेणी से निकाले गये विभिन्न पदों के विचलनों का माध्य हैं।
- यदि अपकिरण की मात्रा कम होती हैं तो माध्य उस श्रेणी का उचित प्रतिनिधित्व करता है और विश्वसनीय माना जाता हैं। यदि मात्रा अधिक है तो माध्य श्रेणी कम प्रतिनिधित्व नहीं करता हैं।

अपकिरण ज्ञात करने की विधियाँ

(i) विस्तार (Range) - किसी समंकमाला में सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्य के अन्तर को विस्तार या परास कहते हैं।

परास = R=L-S

विस्तार के सापेक्ष माप को विस्तार गुणांक कहते हैं।

विस्तार गुणांक = $\frac{L-S}{L+S}$

(ii) अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter – Quartile Range)

समंक श्रेणी के तृतीय चतुर्थक और प्रथम चतुर्थक के अन्तर को अन्तर चतुर्थक विस्तार कहते हैं।

सूत्र = $Q_3 - Q_1$

- यह विस्तार से श्रेष्ठ होता हैं क्योंकि इस पर चरम मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
- यह श्रेणी के आधे भाग का विस्तार बताता हैं जिसमें केवल 50% मूल्यों का समावेश होता हैं।

शतमक विस्तार (Percentile Range)

- 90 तथा 10 क्रमसंख्या के शतमकों का अन्तर शतमक विस्तार कहलाता हैं।
- इसमें सबसे पहले श्रेणी के 90^{th} व 10^{th} शतमक निकाले जाते हैं । (P_{90} व P_{10})

सूत्र = $P.R = P_{90} - P_{10}$

यह रीति विस्तार तथा अन्तर चतुर्थक विस्तार से श्रेष्ठ मानी जाती हैं क्योंकि

(i) चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होती।

(ii) यह श्रेणी के मध्य के 80% भाग पर आधारित होती हैं।

चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के आधे को चतुर्थक विचलन कहते हैं।

सूत्र = Q.D = $\frac{Q_3-Q_1}{2}$

चतुर्थक विचलन गुणांक

सूत्र = $\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

माध्य विचलन (Mean Deviation)

- समंक श्रेणी के सांख्यिकीय माध्य से निकाले गये विभिन्न मूल्यों के विचलनों का समान्तर माध्य उनका माध्य विचलन कहलाता हैं।
- मूल्यों के विचलन निकालते समय चिन्ह + तथा – को छोड़ दिया जाता है, अर्थात् ऋणात्मक विचलन भी धनात्मक मान लिये जाते हैं।
- माध्यिका से निकाला गया माध्य विचलन श्रेष्ठ होता हैं।
- माध्य विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर δ डेल्टा प्रयोग किया जाता हैं।

1. व्यक्तिगत श्रेणी से माध्य विचलन

माध्यिका से $= \delta_M = \frac{\sum dM}{N}$

समान्तर माध्य से $= \frac{\sum dx}{N}$

बहुलक से $= \delta_Z = \frac{\sum dz}{N}$

○ माध्य विचलन गुणांक ज्ञात करने के लिए माध्य विचलन को संबंधित माध्य से भाग दिया जाता हैं।

उदाहरण -1 भार – 45, 47, 47, 49, 50, 53, 58, 59, 60

समान्तर माध्य से और मध्यका से माध्य विचलन ज्ञात करों ?

X	$X - M$	$X - \bar{X}$
45	-5	-7
47	-3	-5
47	-3	-5
49	-1	-3
50	0	-2
53	3	1
58	8	6
59	9	7
60	10	8
$\sum X = 468$	$\sum dM = 42$	$\sum dX = 44$

$$\bar{X} = \frac{468}{9} = 52$$

$M = \frac{N+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$ वाँ मान =50

माध्य विचलन =

$$\delta_M = \frac{\sum dM}{N} = \frac{42}{9} = 4.67$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{44}{9} = 4.89$$

माध्य विचलन गुणांक =

$$\delta_M = \frac{4.67}{50} = 0.0934$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{4.89}{52} = 0.094$$

2. खंड़ित श्रेणी

सूत्र =

$$\delta_M = \frac{\sum f(dM)}{N}$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{\sum f dX}{N}$$

उदाहरण –

पद आकार X	आवृत्ति (f)	CF	fx
4	2	2	8
6	4	6	24
8	5	11	40
10	3	14	30
12	2	16	24
14	1	17	14
16	4	21	64
			$\sum fdx = 204$

Unleash the topper in you

$$\overline{X} = \frac{\sum fdx}{N} = \frac{204}{21} = 9.71$$

$$M = \frac{N+1}{2} = \frac{21+1}{2} = 11 \text{ वाँ मान}$$

$$M = 8$$

X	f	dM	fdM	dx	fdx
4	2	-4	8	5.71	11.42
6	4	-2	8	3.71	14.84
8	5	0	0	1.71	8.55
10	3	2	6	.29	.87
12	2	4	8	2.24	4.58
14	1	6	6	4.29	4.29
16	4	8	32	6.29	25.16
			$\sum fdM = 68$		$\sum fdx = 69.71$

$$\delta_M = \frac{68}{21} = 3.24$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{69.71}{21} = 3.32$$

गुणांक

$$\delta_M = \frac{3.24}{8} = 0.405$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{3.32}{9.71} = 0.342$$

3. **अखंडित श्रेणी** – इस श्रेणी में माध्य विचलन ज्ञात करने की वही रीति हैं जो खंड़ित श्रेणी में प्रयुक्त होती हैं। अन्तर इतना ही हैं कि वर्गान्तरों के माध्य बिन्दू निकालकर उन्हे (X) मान लिया जाता हैं।

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

यह एक आदर्श व वैज्ञानिक अपकिरण माप है जिसका सांख्यिकी में सर्वाधिक प्रयोग किया जाता हैं।

इसकी दो विशेषताएँ हैं –

(i) विचलन सदैव समान्तर माध्य से लिए जाते हैं।

(ii) (+) व (-) को छोड़ा नहीं जाता बल्कि प्राप्त विचलनों के वर्ग कर लिए जाते हैं।

प्रमाप विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला के σ (सिग्मा) का प्रयोग किया जाता हैं।

1. **व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप विचलन**

(i) प्रत्यक्ष रीति

सूत्र = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$ या $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{N}}$

उदाहरण –

S.N.	Weight (X)	$d = X - \overline{X}$	$d^2 = (X - \overline{X})$
1.	41	-10	100
2.	44	-7	49
3.	45	-6	36
4.	49	-2	4
5.	50	-1	1
6.	53	2	4

7.	55	4	16
8.	55	4	16
9.	58	7	49
10.	60	9	81
	$\sum X = 510$		$\sum d^2 = 356$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{510}{10} = 51$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = \sqrt{\frac{356}{10}} = \sqrt{35.6} = 5.97$$

प्रमाप विचलन गुणांक $= \frac{\sigma}{\overline{X}}$

$$= \frac{5.97}{51} = 0.117$$

(ii) लघु रीति = कल्पित माध्य मानकर

सूत्र =

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2 X}{N} - \frac{(\sum dx)^2}{N}}$$

2. खंडित श्रेणी

(i) प्रत्यक्ष रीति

- श्रेणी का सर्वप्रथम समान्तर माध्य निकाला जाता हैं।
- मूल्यों में से समान्तर माध्य घटाकर विचलन ज्ञात किया जाता हैं।
- विचलनो का वर्ग किया जाता हैं।
- विचलनों के वर्गों को आवृत्तियों से गुणा करके जोड़ प्राप्त किया जाता हैं।

सूत्र $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

X	f	fX	$d = (X - \bar{X})$	d^2	f+d^2
10	5	50	-5.52	30.47	152.35
12	8	96	-3.52	12.40	99.2
16	21	336	-0.48	0.23	4.83
18	24	432	-2.48	6.15	147.6
20	18	360	+4.48	20.07	361.26
22	5	110	+6.48	42.00	210
24	7	168	+8.48	71.91	503.37
	N=100	$\sum fx = 1552$			$\sum fd^2 = 1478.61$

$$\overline{X} = \frac{1552}{100} = 15.52$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{1478.61}{100}} = 3.84$$

गुणांक

$$= \frac{3.84}{15.52} = 0.2474$$

लघु रीति – कल्पित माध्य मानकर

व्यक्तिगत श्रेणी का Example =

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2 x}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

Toppersnotes
Unleash the topper in you