Toppersnotes®
Unleash the topper in you

MP – TET

माध्यमिक शिक्षक पात्रता परीक्षा (वर्ग - 2)

मध्यप्रदेश कर्मचारी चयन मण्डल (MPESB)

भाग - 5

गणित

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

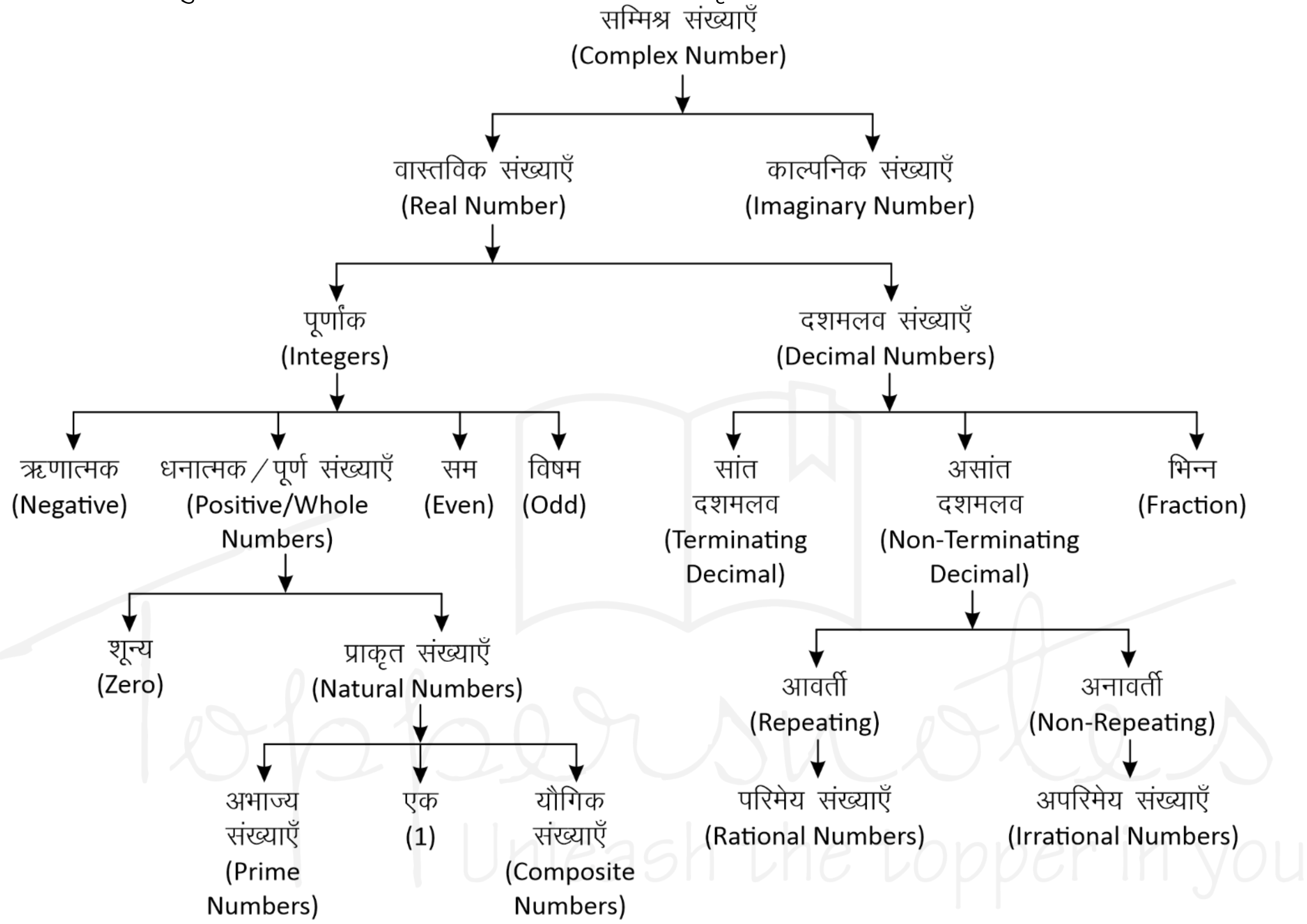
विषयसूची

1 CHAPTER

संख्या पद्धति (Number System)

संख्या पद्धति :– किसी भी यौगिक राशि के परिणामों का बोध कराने के लिए जिस पद्धति का उपयोग होता है, संख्या पद्धति कहलाती है।

संख्याओं को उनके गुणों और विशेषताओं के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है –



सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)

वे सभी संख्याएँ जो वास्तविक और काल्पनिक संख्याओं से मिलकर बनी होती है।

इन्हें (a + ib) के रूप में लिखा जाता है। जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ है तथा $i = \sqrt{-1}$ है।

Z = a (वास्तविक संख्या) + ib (काल्पनिक संख्या)

1. वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers): परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

I. पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ–साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती है, इसे **I** से सूचित करते हैं।

I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

(i) धनात्मक / पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते है, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती है।

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

नोट : चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

A. प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते है।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \dfrac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है ।

उदाहरण –

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

(a) अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) :- एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह संख्या स्वयं, उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}

- तीन अंको की सबसे छोटी अभाज्य संख्या = 101
- तीन अंको की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या = 997

जहाँ 1 Prime Number नहीं है।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

☞ **अभाज्य संख्याओं का परीक्षण :–** दी गयी संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। माना यह संख्या x है, अब x से छोटी समस्त अभाज्य संख्याओं की सहायता से दी गयी संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए।

- यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक अभाज्य संख्या होगी।

उदाहरण –

क्या 349 एक अभाज्य संख्या है या नहीं ?

हल –

349 का संभावित वर्गमूल 19 होगा और 19 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 है।

स्पष्ट है कि 349 इन सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्य नहीं है अतः 349 भी एक अभाज्य संख्या है।

सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)

HCF = 1

(b) यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers) :- वे प्राकृत संख्याएँ जो 1 या स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से भी विभाज्य हो, यौगिक संख्याएँ कहलाती है।

जैसे – 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

(ii) सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है।

n वां पद = 2n

प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

(iii) विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती है।

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}\right\}$

II. दशमलव

दशमलव वे संख्याएँ है जो दो पूर्ण संख्याओं या पूर्णांको के बीच आती है। जैसे – 3.5 एक दशमलव संख्या है जो 3 व 4 के बीच स्थित है।

- प्रत्येक दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक भिन्न को भी दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

(i) सांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

(ii) असांत दशमलव

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक।

जैसे – 0.3333, 0.7777, 0.183183183...........

ये दो प्रकार के हो सकते हैं –

A. आवर्ती दशमलव भिन्न (Repeating)

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

जैसे – $\frac{1}{3} = 0.333...,\frac{22}{7} = 3.14285714.....$

- ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं।

इसे बार बोलते है।

$0.333..... = 0.\overline{3}$

$\frac{22}{7} = 3.14285714.... = 3.\overline{142857}$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.\overline{P} = \frac{P}{9}$ $\quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$ $\quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.p\overline{q} = \frac{pq - p}{90}$ $\quad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$

$0.p\overline{qr} = \frac{pqr - p}{990}$ $\quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs - pq}{9900}$

उदाहरण –

(i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625 - 6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524 - 35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

- **परिमेय (Rational) संख्याएँ** – वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

उदाहरण –

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

B. अनावर्ती (Non-Repeating)

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती।

जैसे – $\pi = 3.1415926535897932...$

$\sqrt{2} = 1.41421356237...$

- **अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ** – इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण –

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}......$

भिन्न (Fraction) :- भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण चीज का कोई भाग निरूपित करती है।

जैसे एक सेब के चार भाग किये जाते है, उसमें से एक हिस्सा निकाल दिया गया तो उसे $\frac{1}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। जबकि शेष बचे भाग को $\frac{3}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जायेगा।

भिन्न दो भागों में बंटा होता है – अंश व हर

माना कोई भिन्न $= \frac{p \rightarrow \text{अंश}}{q \rightarrow \text{हर}}$

भिन्नों के प्रकार

भिन्न

- **साधारण भिन्न, जिसमें अंश, हर से पूर्णत: विभाजित नहीं होता**
  उदा. – $\frac{5}{6}$
  - **उचित भिन्न: अंश का मान हर की अपेक्षा कम होता है।**
    जैसे – $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{11}$
  - **अनुचित भिन्न: अंश का मान, हर की अपेक्षा अधिक होता है।**
    जैसे – $\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{23}{15}$
  - **मिश्रित भिन्न – जो एक पूर्णाक व एक भिन्न से मिलकर बनी हो।**
    जैसे – $6\frac{3}{4}, 2\frac{3}{5}$
- **दशमलव भिन्न: जिसमें हर के रूप में 10 अथवा 10 की कोई घात होती है।**
  उदा. – $\frac{45}{100}$
  - **साधारण आवृत दशमलव भिन्न –जिनमें दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले सभी अंको की पुनरावृत्ति हो**
    जैसे – $\frac{10}{3} = 2.8333 ...$
  - **मिश्रित आवृत दशमलव भिन्न – जिनमें दशमलव बिन्दु के 1 या 2 अंको के बाद अंको की पुनरावृत्ति हो।**
    जैसे – $\frac{17}{6} = 2.8333$

2. **काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Numbers)**: जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

परफेक्ट संख्या (Perfect Number)

वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण –

6 → 1, 2, 3 → यहाँ 1 + 2 + 3 → 6

28 → 1, 2, 4, 7, 14 → 1 + 2 + 4 + 7 + 14 → 28

पूर्णवर्ग संख्या की पहचान

↓

इकाई अंक जो एक पूर्ण वर्ग संख्या के हो सकते है।	जो नहीं हो सकते
• 0	2 ——
• 1	3 ——
• 4	7 ——
• 5 or 25	8 ——
• 6	
• 9	

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

<u>**नोट**</u> – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवष्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

1. **Decimal संख्या को Binary में बदलना :**
   किसी डेसीमल (दस–आधारी) संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त डेसीमल (दस–आधारी) संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते है जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।
   अब सभी शेषफल को उल्टे क्रम में लिखा जाए तो परिवर्तित बाइनरी संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण –

2 × 44 = 88 ; 89 – 88 = 1	89
2 × 22 = 44 ; 44 – 44 = 0	44
2 × 11 = 22 ; 22 – 22 = 0	22
2 × 5 = 10 ; 11 – 10 = 1	11
2 × 2 = 4 ; 5 – 4 = 1	5
2 × 1 = 2 ; 2 – 2 = 0	2
	1

अतः 89 के समतुल्य **Binary number = $(1011001)_2$**

2. **Binary को Decimal में बदलना :**
   Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाई ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण –

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

अब

$(1011001)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \times 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \; \{2^0 = 1\} = 89$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण –

2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल –

$2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या = (3+1) (1+1) (1+1) (1+1)

= 4 × 2 × 2 × 2 = 32

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. **जब संख्या घात (Power) के रूप में हो**
   जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा।
   जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना षेश प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः विभाजित हो जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।

2. **सरलीकरण के रूप में हो**
   प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो
   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा।
2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

n विषम होने पर भाजक → (a–b)

n सम होने पर भाजक → (a – b) या (a + b) या दोनों।

(i) $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

(ii) $a^n \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा; यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा }

(iii) $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा

(iv) $(a^n + a) \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा। यदि n विषम हो, तो शेषफल $(a-1)$ होगा। }

रोमन पद्धति के संकेतक

1	→	I	20	→	XX
2	→	II	30	→	XXX
3	→	III	40	→	XL
4	→	IV	50	→	L
5	→	V	100	→	C
6	→	VI	500	→	D
7	→	VII	1000	→	M
8	→	VIII			
9	→	IX			
10	→	X			

विभाज्यता के नियम

संख्या	नियम
2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	यदि दी गयी संख्या के इकाई अंक का दुगुना बाकी संख्या (इकाई का अंक छोड़कर) से घटाने पर प्राप्त संख्या 7 से विभाजित है तो पूरी संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी। अथवा किसी संख्या में अंको की संख्या 6 के गुणज में हो तो संख्या 7 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	किसी संख्या में एक ही अंक 6 बार दोहराए या अन्तिम अंक को 4 से गुणा करके शेष संख्या (इकाई अंक छोड़कर) में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 17784

अभ्यास प्रश्न

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किसी संख्या का 3/4 उस संख्या के 1/6 से 7 अधिक है, तो उस संख्या 5/3 क्या होगा?

(a) 12 (b) 18
(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b, उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$
(c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

(a) 1350 (b) 1250
(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का 5/16 ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का 5/6 ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये।

(a) 300 (b) 480
(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48
(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 64329 को जब किसी सख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते है तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224
(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2 $(3^{25}+3^{26}+3^{27}+3^{28})$ विभाजित है।

(a) 11 (b) 16
(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है। तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706
(b) 2796
(c) 2736
(d) 2826

उत्तर (c)

इकाई अंक निकालना आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $416\times333+2167\times118-114\times133$ के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

कितना है ?

(a) 0 (b) 2
(c) 3 (d) 5

प्राकृतिक संख्याओं के squre/cube के योग एवं अंतर पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $(11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 20^2) = ?$

(a) 385 (b) 2485

(c) 2870 (d) 3255

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = ?$

दशमलव संख्या आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016\times0.025}{0.325\times0.05}\div\frac{0.1216\times0.105\times0.002}{0.08512\times0.625\times0.039}+\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$$

उसका उत्तर $\frac{19}{10}$ था। उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2 $\frac{0.\overline{936}-0.\overline{568}}{0.\overline{45}+2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

शून्य की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(1^1\times2^2\times3^3\times4^4\times..........\times98^{98}\times99^{99}\times100^{100}\right)$ के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200 (b) 1300

(c) 1500 (d) 1600

उदा.2 1 × 2 × 3 × ...... × 250 को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करने पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्न मे से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बड़ी संख्या हैं।

$(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$

(a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1

(c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

आरोही/अवरोही क्रम आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{2},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{6}$ को बढ़ते क्रम में लिखने पर –

(a) $\sqrt{2},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ –

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9},\frac{11}{13},\frac{16}{19},\frac{21}{25}$ को अवरोही क्रम में लिखिये ?

गुणनखंडों की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left\{(127)^{127}+(97)^{127}\right\}$ तथा $\left\{(127)^{97}+(97)^{97}\right\}$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

(a) 127 (b) 97

(c) 30 (d) 224

उदा.2 $\frac{(18)^{15}\times(75)^{16}\times(42)^{14}}{(35)^{12}\times(12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड है ?

toppersnotes Unleash the topper in you

2 CHAPTER ऐकिक नियम

इसमें हम सर्वप्रथम एक का मान ज्ञात करते हैं और उसके आधार पर ही अन्य का मान निकालते हैं।

उदाहरण –

(1) 8 पेनों का मूल्य 96 रुपये हैं तो 2 दर्जन पेनों का मूल्य क्या होगा ।

हल – 8 पेनों का मूल्य = 96रु.

1 पेन का मूल्य = $\frac{96}{8}$ = 12

तब 2 दर्जन पेनों का मूल्य = 24 × 12 = 288 रू.

नोट – 1 दर्जन = 12

(2) 5 किताबों का मूल्य 1450 रु. है तो 42 किताबों का मूल्य होगा ।

हल – 5 किताबों का मूल्य = 1450

1 किताब का मूल्य = $\frac{1450}{5} = 290$

तो 42 किताब का मूल्य = 290 × 42 = 12180 रु.

(3) 12 दर्जन केलो का मूल्य 720 रु. हैं तो 11 केलों का मूल्य क्या होगा ।

हल – 12 दर्जन केलो का मूल्य = 720 रु.

1 केले का मूल्य = $\frac{720}{12\times12} = 5$

तब 11 केलो का मूल्य = 11 × 5 = 55 रु.

(4) किसी कार्य को एक व्यक्ति 42 दिन में करता है तो उस कार्य को 9 व्यक्ति कितने दिन में करेंगे।

हल – 1 व्यक्ति किसी कार्य को = 42 दिन

9 व्यक्ति उसी कार्य को $= \frac{42}{9} = 4\frac{6}{9} = 4\frac{2}{3}$ दिन में

(5) किसी छात्रावास में 35 बच्चों के 25 दिन का भोजन हैं।
यदि यह भोजन 5 बच्चों के लिए कितने दिन चलेगा

हल – 35 बच्चों के लिए भोजन = 25 दिन

1 बच्चे के लिए भोजन = 25 × 35

5 बच्चों के लिए भोजन = $\frac{25\times35}{5} = \frac{875}{5} =$ 175 दिन

(6) एक मकान की रंगाई पुताई 4 व्यक्ति 9 घण्टे प्रतिदिन काम करके 6 दिन में कार्य सम्पन्न करते हैं तो
बताओं 9 व्यक्ति 5 घण्टें काम करके कितने दिन में कार्य सम्पन्न करेंगे

हल – $\frac{M_1\times D_1\times H_1}{W_1} = \frac{M_2\times D_2\times H_2}{W_1}$

M = आदमी

D = दिन

H = घण्टे

W = कार्य

$M_1 \times D_1 \times H_1 = M_2D_2H_2$

$= 4\times6\times9 = 9\times5\times D_2$

$= \frac{4\times6\times9}{9\times5} = D_2$

$D_2 = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ दिन

(7) यदि एक रेलगाड़ी 24Km/h के हिसाब सें चल रही हैं। जिसे 468Km तक जाने के लिए कितना समय लगेगा।

हल – रेलगाड़ी की चाल = 24Km/h

माना समय = x

(दूरी = समय x चाल)

कुल दूरी 468 = $x \times 24$

$\frac{468}{24} = x$

$x = 19.5$

रेलगाडी का कुल समय = 19 घण्टे 30 मिनट

(8) एक विद्यालय छात्रावास में 500 बच्चों का 1225 दिन का खाना हैं। यदि विद्यालय में 25 दिन बाद 100 बच्चे और आ जाते हैं। तो बताइये शेष बची सामग्री कितने दिन और चल सकती हैं।

हल – 500 बच्चें , 25 दिन खाना खा लिये तो दिन बचे 1200 और बच्चे 100 अधिक हों गए

$= \frac{500\times1200}{(500+100)} = \frac{500\times1200}{600} = 1000$

अब 600 बच्चें 1000 दिन तक और खाना खाएंगे

नोट –

इस प्रकार के प्रश्नों में जितने दिन खाना खा लिया हो या जितने दिन काम कर लिया हो उन

दिनों को कुल दिनों में से घटाकर D_1 के स्थान पर लिख देते हैं।

यदि व्यक्ति आते हैं तो पहले वाले व्यक्तियों में जोड़कर या यदि व्यक्ति चले जाते हैं तो पहले वाले व्यक्तियों में घटाकर M_2 के स्थान पर लिख देतें हैं।

(9) एक सैनिक शिविर में 400 व्यक्तियों के लिए 1500 दिन का खाना उपलब्ध हैं। 100 दिन खाने के बाद 50 व्यक्ति चले जाते हैं तो शेष सामग्री कितने दिन चलेगी।

हल – $M_1 \times D_1 = M_2 \times D_2$

$= 400 \times (1500 - 100) = (400 - 50) \times D_2$

$= 400 \times 1400 = 350 \times D_2$

$D_2 = \frac{400\times1400}{350} = 1600$

शेष भोजन सामग्री = 1600 दिन तक पर्याप्त हैं।

(10) A किसी कार्य को 6 दिन में और B किसी कार्य को 10 दिन में कर सकता हैं। तो दोनों मिलकर काम करें तो कितने दिन में कर सकते हैं।

हल – A का एक दिन का कार्य $= \frac{1}{6}$ भाग

B का एक दिन का कार्य $= \frac{1}{10}$ भाग (A + B) का 1 दिन का कार्य $= \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{5+3}{30} = \frac{8}{30}$ भाग

$\frac{8}{30}$ भाग कार्य करते है = 1 दिन

1 भाग कार्य करेंगे $\frac{1}{8/30} = 30/8 \quad \frac{30}{8} = 3\frac{6}{8} = 3\frac{3}{4}$ दिन में

(11) किसी उपन्यास में 90 पृष्ठ हैं और प्रत्येक पृष्ठ में 44 पक्तियाँ है। प्रत्येक पंक्ति में शब्दों की संख्या 6 है तो उपन्यास के 67 पृष्ठ में कितने शब्द हैं।

हल – पृष्ठ × पंक्तियाँ × शब्द = कुल शब्द

$67 \times 44 \times 6 = 17688$

Toppersnotes
Unleash the topper in you

3 CHAPTER

करणी व घातांक (Surds and Indices)

करणी

वे राशियाँ जिनका मूल मान ठीक–ठीक नहीं निकाला जा सके, उसे करणी कहते है।

- यदि a एक परिमेय संख्या है तथा m एक धन पूर्णांक है, तो a का m वाँ मूल या $a^{\frac{1}{m}}$ या $\sqrt[m]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होगी, यहाँ पर $\sqrt[m]{a}$ एक करणी है।

  जैसे – $\sqrt{2},\sqrt{3}$ इत्यादि ।
- करणी के अनेक रूप है जैसे – $\sqrt[2]{\ },\sqrt[3]{\ },\sqrt[4]{\ },\sqrt[5]{\ }$ ....
- $a^{\frac{1}{m}}$ को m वाँ घात युक्त करणी कहा जाता है ।

करणियों के प्रकार

शुद्ध करणी	मिश्र करणी	सजातीय करणी	संयुग्मी करणी
वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड हो तो ऐसी करणी को शुद्ध करणी कहते हैं।	वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड के अलावा कोई भी एक परिमेय संख्या मौजूद हो। जैसे :– $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{8}$, $2\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी करणिया जिसमें उनके अपरिमेय गुणनखण्ड एक समान हो। जैसे :– $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी दो पद वाली दो करणिया जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते है। जैसे :– $\left(2+\sqrt{8}\right)$ व $\left(2-\sqrt{8}\right)$, $\left(2+\sqrt{5}\right)$ व $\left(2-\sqrt{5}\right)$

जब पूरी राशि करणीगत हो

- यदि करणी में लिखी संख्या के दो क्रमागत गुणनखण्ड न हो सके तो पूरी राशि को x के बराबर मानकर दोनों पक्षो का वर्ग करके द्विघात समीकरण रूप ($ax^2 + bx + c = 0$) में बदलेंगे।
- तब श्री धराचार्य सूत्र से $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

करणियों में संक्रियाएँ

(1) करणी का योग व अंतर

केवल सजातीय करणियों को ही आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है।

उदा. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

हल $\sqrt{25\times 3} + \sqrt{16\times 3}$

$= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= 9\sqrt{3}$

उदा. $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

हल $\sqrt{9\times 3} - \sqrt{4\times 3}$

$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

(2) करणी का गुणा–भाग

करणियों का गुणा भाग तभी संभव है जब उनकी घातें समान हो।

उदा. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{4}$

हल $\sqrt[3]{2\times 5\times 4}$

$= \sqrt[3]{40}$

उदा. $12\times 4^{\frac{1}{3}}$ में $3\sqrt{2}$ से भाग दो ।

हल $\dfrac{12\times 4^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\times 4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4\times 4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}$

$= 4\times\left[\dfrac{4^2}{2^3}\right]^{\frac{1}{6}} \quad = 4\times\left[\dfrac{16}{8}\right]^{\frac{1}{6}}$

$= 4\times 2^{\frac{1}{6}}$

करणियों के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$

(2) $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a^2\times b} = a\sqrt{b}$

(4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

(5) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}$

(6) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

Unleash the topper in you

(7) $\sqrt{2} = 1.41421$

(8) $\sqrt{3} = 1.73205$

(9) $\sqrt{5} = 2.23607$

(10) $\sqrt{6} = 2.44949$

संयुग्मी

- ऐसी दो पद वाली करणी जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते हैं तो ऐसी करणियों को संयुग्मी करणी कहते हैं।
- इस प्रकार की राशियों का मान ज्ञात करने के लिए हर की संयुग्मी से अंश व हर दोनों से गुणा करते है।

उदा. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$

$= \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}$

$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2}$

$= 2-\sqrt{3}$

करणियों की तुलना (बडा या छोटा)

- दिये गये करणियों में से सबसे बड़ा या छोटा निकालने के लिए हम घातांक को समान करते है तथा आधार की तुलना करते है।

उदा. $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

हल $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ की घातें 3, 2, 3 है जिनका LCM = 6 हैं।

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

$\sqrt{4} = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64}$

$\sqrt[3]{6^2} = \sqrt[6]{36}$

अतः सबसे बड़ी संख्या $= \sqrt[6]{64} = \sqrt{4}$

घातांक – किसी संख्या को उसी से जितनी बार गुणा करते है उतने को उस संख्या की घात कहते है और उस संख्या को आधार कहते है।

घातांक के कुछ महत्वपूर्ण नियम

(i) $a^m = a \times a \times a \times$ …….. m बार

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$

(iv) $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

(v) $[(a^m)^n]^l = a^{mnl}$

(vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(vii) $a^\circ = 1$ {किसी भी संख्या की घात शून्य हो तो, उस पूरी राशि का मान 1 होता है।}

(viii) $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$

(ix) $a^m = b^n$

$a = (b)^{n/m}$ or $b = (a)^{m/n}$

(x) $a^m = b$ तो $a = b^{1/m}$

- यदि Power भिन्न रूप में हो तो बड़ा या छोटा value निकालना हो घात के हर का ल.स.प. लेंगे और ल.स.प. से प्रत्येक घात को गुणा करेंगे और जिसकी बड़ी value आयेगी वह बड़ा होगा और जिसकी छोटी value आएगी वह छोटा होगा।

उदा. $(2)^{\frac{1}{4}}, (3)^{\frac{1}{6}}, (4)^{\frac{1}{8}}, (8)^{\frac{1}{12}}$

हल $(2)^{\frac{1}{4}\times 24} = 2^6 = 64$

$(3)^{\frac{1}{6}\times 24} = 3^4 = 81$

$(4)^{\frac{1}{8}\times 24} = 4^3 = 64$

$(8)^{\frac{1}{12}\times 24} = 8^2 = 64$

अतः $3^{\frac{1}{6}}$ बड़ा है (नोट – यहाँ 4, 6, 8, 12 का ल.स.प. 24 है।)

अभ्यास प्रश्न

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{214+\sqrt{107+\sqrt{196}}}$ का मान है।

(a) 23 (b) 15

(c) 24 (d) 18

उत्तर– (b)

उदा.2 निम्न का मान क्या होगा ?

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots ....}}}$

(a) 5 (b) 3

(c) 2 (d) 30

उत्तर– (b)

उदा.3 निम्न का मान ज्ञात करो ?

$\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

(a) 2 (b) 4

(c) ±2 (d) -2

उत्तर– (c)

उदा.4 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ का मान होगा ?

(a) $2\sqrt{10}$ (b) 0

(c) $2\sqrt{6}$ (d) $2\sqrt{15}$

उत्तर– (b)

उदा.5 $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ का मान क्या है

(a) 1 (b) 0

(c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{7}$

उत्तर– (b)

उदा.6 $\sqrt{2^3\sqrt{4\sqrt{2^3\sqrt{4.........}}}}$ का मान है ?

(a) 2 (b) 2^2

(c) 2^3 (d) 2^5

उत्तर– (a)

उदा.7 $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\sqrt[6]{6}$ मे से सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{3}$

(c) $\sqrt[4]{4}$ (d) $\sqrt[6]{6}$

उत्तर– (b)

उदा.8 निम्नलिखित को अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें (बड़े से छोटा) ।

$\sqrt[3]{4},\sqrt{2},\sqrt[6]{3},\sqrt[4]{5}$

(a) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{3}$

(b) $\sqrt[3]{4}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}$

(c) $\sqrt{2}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}$

(d) $\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{5}>\sqrt[3]{4}>\sqrt{2}$

उत्तर– (a)

उदा.9 इनमें से सबसे छोटी संख्या है।

$\sqrt[6]{12},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5},\sqrt{3}$

(a) $\sqrt[6]{12}$ (b) $\sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{5}$ (d) $\sqrt{3}$

उत्तर– (c)

उदा.10 $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$ का वर्गमूल क्या होगा ?

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

उत्तर– (a)

उदा.11 यदि x, y परिमेय संख्याएँ हो और $\frac{5+\sqrt{11}}{3-2\sqrt{11}}=x+y\sqrt{11}$ हो तो x और y का मान होगा ?

(a) $x=\frac{-14}{17},y=\frac{-13}{26}$

(b) $x=\frac{4}{13},y=\frac{11}{17}$

(c) $x=\frac{-27}{25},y=\frac{-11}{37}$

(d) $x=\frac{-37}{35},y=\frac{-13}{35}$

उत्तर– (d)

उदा.12 यदि $\sqrt{50}+\sqrt{128}=\sqrt{N}$ तो N का मान क्या है ?

(a) 26 (b) 390

(c) 338 (d) 182

उत्तर– (c)

उदा.13 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......}}}$ के बराबर है ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$

(c) 2 (d) 3

उत्तर– (c)

उदा.14 जब $\left(4+\sqrt{7}\right)$ को पूर्ण वर्ग के रूप में लिखा जाता है तो वह निम्न में से किसके बराबर होगा ?

(a) $\left(2+\sqrt{7}\right)^2$ (b) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$

(c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{7}+1\right)\right\}^2$ (c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)^2$

उत्तर– (c)

उदा.15 व्यंजक $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ का मान होगा –

(a) 3 (b) 1

(c) 8 (d) 2

उत्तर– (d)

उदा.16 यदि $\sqrt{7}=2.6457$ और $\sqrt{3}=1.732$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(a) 1.0944 (b) 1.944

(c) 1.009 (d) 1.0844

उत्तर– (a)

उदा.17 यदि $10^{0.48} = X$, $10^{0.70} = y$ और $X^z = y^2$, तो z का लगभग मान होगाः

(a) 1.45 (b) 1.88

(c) 2.9 (d) 3.7

उत्तर– (c)

उदा.18 यदि $5^a = 3125$, तो $5^{(a-3)}$ का मान होगा?

(a) 25 (b) 125

(c) 625 (d) 1625

उत्तर– (a)

उदा.19 $\frac{(243)^{\frac{n}{5}} \times 3^{2n+1}}{g^n \times 3^{n-1}} = ?$

(a) 1 (b) 2

(c) 9 (d) 9^n

उत्तर– (c)

उदा.20 यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$ तब $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ किसके बराबर होगा ?

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

उत्तर– (a)

उदा.21 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?
3^{50}, 4^{40}, 5^{30} और 6^{20}

(a) 3^{50} (b) 4^{40}

(c) 5^{30} (d) 6^{20}

उत्तर– (b)

उदा.22 निम्न संख्याओं में सबसे छोटा है :
2^{250}, 3^{150}, 5^{100}, 4^{200}

(a) 2^{250} (b) 3^{150}

(c) 5^{100} (d) 4^{200}

उत्तर– (c)

उदा.23 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौन सी है ?
$\frac{4}{9}, \sqrt{\frac{9}{49}}, 0.49, (0.7)^2$

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\sqrt{\frac{9}{49}}$

(c) 0.47 (d) $(0.7)^2$

उत्तर– (d)

4 CHAPTER

बीजगणित (Algebra)

चर राशियाँ (Variable) – वे राशियाँ जिसका मान स्थिर न होकर बदलता रहता है, चर राशियाँ कहलाती है। शब्द 'चर' का अर्थ है कि वह राशि जो परिवर्तित (Vary) होती रहती है।

चर राशियों को प्रतीक चिन्ह अथवा संकेत द्वारा प्रदर्शित किया जाता हे।

जैसे – x, y, z, a, b, c आदि।

अचर राशियाँ (Constant) – जिन राशियों का मान स्थिर होता है वह अचर राशियाँ कहलाती है।

जैसे – अंकगणित संख्याएँ 0, 1, 2, 3.................

समान तथा असमान पद (Like and Unlike Terms) – सजातीय पद – वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड समान हों, समान पद अथवा सजातीय पद कहलाते है। इसमें चर तथा उनकी घात समान होती है केवल उनका संख्यात्मक मान भिन्न होता है।

जैसे – $5y^2$ व $25y^2$

जैसे – $3xy - 5x^2 + 4xy + 3x^2 - 4x$ में $3xy$ तथा $4xy$ समान पद और $-5x^2$ तथा $3x^2$ समान पद है।

विजातीय पद – वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड असमान हो, असमान पद अथवा विजातीय पद कहलाते हैं इनमें चर तथा उनकी घार असमान होती है।

जैसे – $3xy$ तथा $-5x^2$ असमान पद।

गुणांक (Coefficient) – पद का कोई भी गुणनखण्ड, पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है। किसी बीजीय पद को उसके गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। इसका संख्यात्मक गुणनखण्ड, संख्यात्मक गुणांक अथवा अचर गुणांक कहलाता है।

$4x^2y$ में x^2 का गुणांक $= 4y$

$4x^2y$ में x^2y का अचर गुणांक $= 4$

बहुपद

$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_nx^n$

जहाँ a_0, a_1, a_2, a_n = वास्तविक संख्या है।

- Variable (चर) x की power (घात) हमेशा धनात्मक होगी।
- **<u>कोटि (Degree)</u>** – अधिकतम घात (बहुपद में Variable की) ही कोटि होगी।
  उदाहरण
  $x^2 + x^3 + 1$, यहाँ कोटि 3 होगी।
  समघातीय व्यंजक की घात–
  $ab + ac + ca$
  'a' या 'b' 'ab' यहां Degree- 2 होगी।
- Degree गुणा में जुडती है तथा भाग में घटती है।
- जोडने व घटाने पर पदों की Degree में फर्क नहीं पडता।

<u>नोट</u> – प्रश्न में पद की जो घात है, उत्तर में भी पद की वही घात रहेगी।

ToppersNotes
Unleash the topper in you

बहुपद के प्रकार

पदो के आधार पर

(1) एकपदी बहुपद – जिसमें केवल एक पद हो।
जैसे – $5x^2y^2, 3x$

(2) द्विपदी बहुपद – जिसमें केवल दो पद हो।
जैसे – $7x^2+5y$

(3) त्रिपदी बहुपद – जिसमें केवल तीन पद हो।
जैसे – $4x^2+7xy+3y^2$

घात के आधार पर

(1) रैखिक बहुपद – जिस बहुपद के चर x की घात 1 है, उसे रैखिक या एक घातीय बहुपर कहते हैं।
जैसे – $4x+2$

(2) द्विघात बहुपद – जिस बहुपद के चर x का उच्चतम मान 2 है।
जैसे – x^2+x+2

(3) त्रिघात बहुपद – जिस बहुपद के चर x की उच्चतम घात 3 हो उसे त्रिघात बहुपद कहते है।
जैसे – ax^3+bx^2+cx+d

(4) शून्य बहुपद – जिसके सभी गुणांक शून्य हो।
जैसे – $2x^0, 5, 19$ आदि।

बहुपद के शून्यक (Zeroes of Polynomial) – जब किसी बहुपद का मान चर के किसी मान के लिए शून्य हो जाता है तो चर का मान बहुपद का शून्यक कहलाता है।

जैसे – बहुपद $p(x) = 2x + 1$ में $x = -\frac{1}{2}$ रखने पर

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

अतः $-\frac{1}{2}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

जैसे – $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f(1) = (1)^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

अतः 1 बहुपद $f(x)$ का शून्यक है।

बहुपद $f(x)$ के शून्यकों की अधिकतम संख्या, बहुपद की घात के बराबर होती है किन्तु यह आवश्यक नहीं कि बहुपद के सभी शून्यक वास्तविक हो –

जैसे – $f(x) = x^2 + x + 1$ का कोई वास्तविक शून्यक नहीं

$f(x) = x^2 + 9$ का कोई वास्तविक शून्यक नहीं

द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)

1. द्विघात समीकरण – जिस समीकरण में चर राशि का अधिकतम मान 2 हो उसे द्विघात समीकरण कहते है।
   एक बीजगणितीय व्यंजक जो इस प्रकार है : $ax^2 + bx + c = 0$
   जहाँ $a \neq 0, b, c \in R$ को द्विघात समीकरण कहते हैं।

द्विघात समीकरण के गुणनखंड की शर्ते

a) दिया हुआ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx\ c = 0$ है जहाँ a, b व c वास्तविक संख्याएँ है।

b) यदि $b^2 - 4ac > 0$ इस स्थिति में गुणनखण्ड निकाले जा सकते है।

c) यदि $b^2 - 4ac < 0$, इस स्थिति में गुणनखण्ड नहीं हो सकते है।

द्विघात समीकरण के मूल (Roots of Quadratic Equation)

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल α [वास्तविक या समिश्र (जटिल)] इस प्रकार है कि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, तब $(x - \alpha)$, $ax^2 + bx + c$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मूलों का योग व गुणनफल

मूलों का योग व गुणनफल – माना दो मूल α, β हैं तब

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ और } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मूलों का योग $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$

तो, $ax^2 + bx + c = 0$ को हम लिख सकते हैं –

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

- यदि मूल α व β एक–दूसरे के व्युत्क्रम है तो $a = c$
- यदि α व β का मान आपस में बराबर तथा चिन्ह विपरीत है, तो $b = 0$
- यदि a, b व c परिमेय संख्याएँ है तथा $a + \sqrt{b}$ द्विघात समीकरण का एक मूल है, तो दूसरा मूल इसके संयुग्मी $a - \sqrt{b}$ तथा विपरीत होगा।

उदा. 1 द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए यदि एक मूल $3 + \sqrt{3}$ है ?

व्याख्या यदि एक मूल $3 + \sqrt{3}$ है, तो इसका दूसरा मूल $3 - \sqrt{3}$ होगा।

मूलों का योग $= \left(3 + \sqrt{3}\right) + \left(3 - \sqrt{3}\right) = 6$

मूलों का गुणनफल $= \left(3 + \sqrt{3}\right)\left(3 - \sqrt{3}\right) = 6$

सूत्र प्रयोग से

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलो की प्रकृति का निर्धारण, D (Determinant) द्वारा किया जाता है ।

जहाँ $D = b^2 - 4ac$ द्वारा निकाला जाता है ।

(i) यदि $D = 0$ (मूल वास्तविक एवं समान)

(ii) यदि $D > 0$ (मूल वास्तविक एवं असमान)

(iii) यदि $D < 0$ (मूल काल्पनिक)

शेषफल प्रमेय – यदि f(x) एक कोई बहुपद है जहाँ $n \geq 1$ तथा a कोई वास्तविक संख्या है। जब f(x) को (x – a) से विभाजित किया जाता है तो f(a) शेषफल आता है। (n यहाँ डिग्री है)

1. यदि f(x) को (x + a) से विभाजित किया जाता है तो शेष होगा = f(–a)
2. यदि f(x) को (ax + b) से विभाजित किया जाता है तो शेष बचेगा = $f\left(-\frac{b}{a}\right)$
3. यदि f(x) को (ax – b) से विभाजित किया जाता है तो शेष $= f\left(\frac{b}{a}\right)$

उदा.1 भाग की क्रिया का इस्तेमाल किए बिना $(x^3 + 4x^2 + 6x - 2) \div (x + 5)$ का शेष ज्ञात कीजिए ?

हल $x + 5 = 0$

$x = -5$ अतः शेष f(-5) होगा

अब

$x^3 + 4x^2 + 6x - 2$ में मान रखने पर

$(-5)^3 + 4(-5)^2 + 6(-5) - 2$

$-125 + 100 - 30 - 2 = -57$

<u>**गुणनखण्ड प्रमेय**</u> – माना f(x) एक बहुपद है एवं a एक वास्तविक संख्या है तब –

(i) यदि f(a) = 0 तो (x-a), f(x) का एक गुणनखण्ड होगा ।

(ii) यदि (x–a), f(x) का एक गुणनखण्ड है तो f(a) = 0

उदा.2 यदि $f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ तो क्या (x – 2) एवं (x – 3), f(x) के गुणनखण्ड है ?

हल (i) f(a) = 0

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 2^3 - 12 \times 2^2 + 44 \times 2 - 48$

$= 8 - 48 + 88 - 48$

$= 0$

अतः (x - 2), f(x) का गुणनखण्ड है ।

(ii) f(a) = 0

$x - 3 = 0$

$x = 3$ रखने पर

$f(3) = 3^3 - 12 \times 3^2 + 44 \times 3 - 48$

$= 27 - 108 + 132 - 48$

$f(3) = -13 \neq 0$

अतः (x – 3), f(x) का गुणनखण्ड नहीं है ।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
2. $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$
3. $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,(A+B)$
4. $(A-B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB\,(A-B)$
5. $(A^2 - B^2) = (A+B)(A-B)$
6. $A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB\,(A+B)$
7. $A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB\,(A-B)$
8. $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)\,(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)$
9. $(A+B+C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3\,(B+C)(C+A)(A+B)$
10. $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$
11. $A^2 - B^2 = (A-B)^2 + 2AB$
12. यदि $A + B + C = 0$ हो तो $A^3 + B^3 + C^3 = 3\,ABC$ or A = B = C
13. $x^2 + x(A+B) + AB = (x+A)(x+B)$
14. $A^2(B+C) + B^2(C+A) + C^2(A+B) + 3ABC = (A+B+C)(AB+BC+CA)$
15. $(A+B)\,(B+C)(C+A) = AB\,(A+B) + BC(B+C) + CA(C+A) + 2ABC$
16. $(A-B)\,(B-C)(C-A) = A^2(B-C) + B^2(C-A) + C^2(A-B)$
17. $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,(AB + BC + CA)$

बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ

(1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

(2) यदि $x + \frac{1}{x} = a$

तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$

$x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$

(3) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

(4) यदि $x - \frac{1}{x} = a$

तब $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$

$x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 + 4a^2 + 2$

(5) यदि $a + \frac{1}{a} = 2$

तब $a^n + \frac{1}{a^n} = 2$ (हमेशा)

(6) यदि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ तब a + b + c = 0 तथा a = b = c

(7) यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ तब a = b = c

अभ्यास प्रश्न

1. बहुपद

प्रश्नों के हल

उदा.1 $x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 3x + 2$ को भाजक $x - 1$ से भाग देने पर कितना शेष प्राप्त होगा ?

(a) 5 (b) 6

(c) 7 (d) 8

उत्तर (c)

उदा.2 जब $f(x) = 12x^3 - 13x - 5x + 7$ में $(3x + 2)$ से भाग दिया जाता है, तो शेषफल क्या होगा ?

(a) 2 (b) 0

(c) -1 (d) 1

उत्तर (d)

उदा.3 यदि $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ है तो $\frac{a+b+c}{c}$ किसके बराबर है ?

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

उत्तर (c)

उदा.4 बहुपदो $x^4 - 3x + 2$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ और $x^4 - 1$ का म.स. क्या है ?

(a) $x - 1$ (b) $x + 1$

(c) $x^2 - 1$ (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (a)

उदा.5 दिये गये बहुपदो का LCM ज्ञात करों ?

$f(x) = 4(x - 1)^2 (x^2 + 6x + 8)$ व $g(x) = 10 (x - 1) (x + 2) (x^2 + 7x + 10)$

उत्तर

2. द्विघात समीकरण

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि समीकरण $kx^2 - 6x + 3k = 0$ के मूलों का योगफल तथा गुणनफल तथा गुणनफल बराबर हो, तो k = ?

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (a)

उदा.2 व्यजंक $x^4 - 2x^2 + k$ एक पूर्ण वर्ग होगा यदि k का मान ?

(a) 1 (b) 0

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.3 समीकरण $2x^2 - 11x + 15 = 0$ के मूल है ?

(a) $3, \frac{5}{2}$ (b) $5, \frac{3}{2}$

(c) $-3, \frac{-5}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (a)

उदा.4 समीकरण $3 - 7x + 6x^2 = 0$ के मूलों का गुणनफल होगा ?

(a) -2 (b) $\frac{1}{2}$

(c) 2 (d) $-\frac{1}{2}$

उत्तर (b)

उदा.5 दो भिन्न इस प्रकार हैं कि उनका गुणनफल $-\frac{2}{5}$ और योग $\frac{1}{15}$ है । ये दो भिन्न क्या है ?

(a) $\frac{4}{3}, -\frac{3}{10}$ (b) $\frac{2}{7}, -\frac{7}{5}$

(c) $\frac{4}{7}, -\frac{7}{10}$ (d) $\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}$

उत्तर (d)

उदा.6 एक द्विघात समीकरण के मूल $(2+\sqrt{5})$ तथा $(2-\sqrt{5})$ है, वह समीकरण होगा ?

(a) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (b) $x^2 + 4x - 1 = 0$

(c) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (d) $x^2 + 4x + 1 = 0$

उत्तर (a)

b और c परिमेय मान है) $5+3\sqrt{3}$ है । $(a^2 + b^2 + c^2)/(a + b + c)$ का मान क्या है ?

(a) 35/3 (b) 37/3

(c) -105/11 (d) -105/13

उत्तर (c)

ToppersNotes Unleash the topper in you