3rd – ग्रेड

अध्यापक

कार्यालय निदेशक, प्रारम्भिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

भाग 4 - (ब)

गणित

विषयसूची

1 CHAPTER

संख्या पद्धति (Number System)

संख्या पद्धति :– किसी भी यौगिक राशि के परिणामों का बोध कराने के लिए जिस पद्धति का उपयोग होता है, संख्या पद्धति कहलाती है।

संख्याओं को उनके गुणों और विशेषताओं के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है –

- सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)
  - वास्तविक संख्याएँ (Real Number)
    - पूर्णांक (Integers)
      - ऋणात्मक (Negative)
      - धनात्मक / पूर्ण संख्याएँ (Positive/Whole Numbers)
        - शून्य (Zero)
        - प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers)
          - अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers)
          - एक (1)
          - यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers)
      - सम (Even)
      - विषम (Odd)
    - दशमलव संख्याएँ (Decimal Numbers)
      - सांत दशमलव (Terminating Decimal)
      - असांत दशमलव (Non-Terminating Decimal)
        - आवर्ती (Repeating) → परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)
        - अनावर्ती (Non-Repeating) → अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)
      - भिन्न (Fraction)
  - काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Number)

सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)

वे सभी संख्याएँ जो वास्तविक और काल्पनिक संख्याओं से मिलकर बनी होती है।

इन्हें (a + ib) के रूप में लिखा जाता है। जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ है तथा $i = \sqrt{-1}$ है।

Z = a (वास्तविक संख्या) + ib (काल्पनिक संख्या)

1. वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers): परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

I. पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ–साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती है, इसे **I** से सूचित करते हैं।

I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

(i) धनात्मक / पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते है, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती है।

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

नोट : चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

A. प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते है।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है ।

उदाहरण –

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

(a) अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) :- एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह संख्या स्वयं, उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}

- तीन अंको की सबसे छोटी अभाज्य संख्या = 101
- तीन अंको की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या = 997

जहाँ 1 Prime Number नहीं है।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

☞ **अभाज्य संख्याओं का परीक्षण :–** दी गयी संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। माना यह संख्या x है, अब x से छोटी समस्त अभाज्य संख्याओं की सहायता से दी गयी संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए।

- यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक अभाज्य संख्या होगी।

उदाहरण –

क्या 349 एक अभाज्य संख्या है या नहीं ?

हल –

349 का संभावित वर्गमूल 19 होगा और 19 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 है।

स्पष्ट है कि 349 इन सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्य नहीं है अतः 349 भी एक अभाज्य संख्या है।

सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)

HCF = 1

(b) यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers) :- वे प्राकृत संख्याएँ जो 1 या स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से भी विभाज्य हो, यौगिक संख्याएँ कहलाती है।

जैसे – 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

(ii) सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है।

n वां पद = 2n

प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

(iii) विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती है।

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}\right\}$

II. दशमलव

दशमलव वे संख्याएँ है जो दो पूर्ण संख्याओं या पूर्णांको के बीच आती है। जैसे – 3.5 एक दशमलव संख्या है जो 3 व 4 के बीच स्थित है।

- प्रत्येक दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक भिन्न को भी दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

(i) सांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

(ii) असांत दशमलव

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक।

जैसे – 0.3333, 0.7777, 0.183183183...........

ये दो प्रकार के हो सकते हैं –

A. आवर्ती दशमलव भिन्न (Repeating)

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

जैसे – $\frac{1}{3} = 0.333...,\frac{22}{7} = 3.14285714.....$

- ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं।

इसे बार बोलते है।

$0.333.....=0.\overline{3}$

$\frac{22}{7}=3.14285714....=3.14\overline{2857}$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.\overline{P}=\frac{P}{9}$ $\quad 0.\overline{pq}=\frac{pq}{99}$ $\quad 0.\overline{pqr}=\frac{pqr}{999}$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.p\overline{q}=\frac{pq-p}{90}$ $\quad 0.pq\overline{r}=\frac{pqr-pq}{900}$

$0.p\overline{qr}=\frac{pqr-p}{990}$ $\quad 0.pq\overline{rs}=\frac{pqrs-pq}{9900}$

उदाहरण –

(i) $0.\overline{39}=\frac{39}{99}=\frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25}=\frac{625-6}{990}=\frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24}=\frac{3524-35}{9900}=\frac{3489}{9900}=\frac{1163}{3300}$

- **परिमेय (Rational) संख्याएँ** – वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

उदाहरण –

$\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{10}{-11},\frac{7}{8}$

B. अनावर्ती (Non-Repeating)

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती।

जैसे – $\pi = 3.1415926535897932...$

$\sqrt{2} = 1.41421356237...$

- **अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ** – इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण –

$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{11},\sqrt{19},\sqrt{26}......$

भिन्न (Fraction) :- भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण चीज का कोई भाग निरूपित करती है।

जैसे एक सेब के चार भाग किये जाते है, उसमें से एक हिस्सा निकाल दिया गया तो उसे $\frac{1}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। जबकि शेष बचे भाग को $\frac{3}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जायेगा।

भिन्न दो भागों में बंटा होता है – अंश व हर

माना कोई भिन्न $=\frac{p \rightarrow \text{अंश}}{q \rightarrow \text{हर}}$

भिन्नों के प्रकार

भिन्न

- **साधारण भिन्न, जिसमें अंश, हर से पूर्णतः विभाजित नहीं होता**
  उदा. – $\frac{5}{6}$
  - **उचित भिन्नः अंश का मान हर की अपेक्षा कम होता है।**
    जैसे – $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{7}{11}$
  - **अनुचित भिन्नः अंश का मान, हर की अपेक्षा अधिक होता है।**
    जैसे – $\frac{4}{3},\frac{7}{5},\frac{23}{15}$
  - **मिश्रित भिन्न – जो एक पूर्णांक व एक भिन्न से मिलकर बनी हो।**
    जैसे – $6\frac{3}{4},2\frac{3}{5}$
- **दशमलव भिन्नः जिसमें हर के रूप में 10 अथवा 10 की कोई घात होती है।**
  उदा. – $\frac{45}{100}$
  - **साधारण आवृत दशमलव भिन्न –जिनमें दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले सभी अंको की पुनरावृत्ति हो**
    जैसे – $\frac{10}{3}=2.8333...$
  - **मिश्रित आवृत दशमलव भिन्न – जिनमें दशमलव बिन्दु के 1 या 2 अंको के बाद अंको की पुनरावृत्ति हो।**
    जैसे – $\frac{17}{6}=2.8333$

2. **काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Numbers)**: जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

परफेक्ट संख्या (Perfect Number)

वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण –

6 → 1, 2, 3 → यहाँ 1 + 2 + 3 → 6

28 → 1, 2, 4, 7, 14 → 1 + 2 + 4 + 7 + 14 → 28

पूर्णवर्ग संख्या की पहचान

↓

इकाई अंक जो एक पूर्ण वर्ग संख्या के हो सकते है।	जो नहीं हो सकते
0	2 ——
1	3 ——
4	7 ——
5 or 25	8 ——
6	
9	

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

<u>**नोट**</u> – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवष्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

1. **Decimal संख्या को Binary में बदलना :**
   किसी डेसीमल (दस–आधारी) संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त डेसीमल (दस–आधारी) संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते है जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।
   अब सभी शेषफल को उल्टे क्रम में लिखा जाए तो परिवर्तित बाइनरी संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण –

2 × 44 = 88 ; 89 – 88 = 1	89
2 × 22 = 44 ; 44 – 44 = 0	44
2 × 11 = 22 ; 22 – 22 = 0	22
2 × 5 = 10 ; 11 – 10 = 1	11
2 × 2 = 4 ; 5 – 4 = 1	5
2 × 1 = 2 ; 2 – 2 = 0	2
	1

अतः 89 के समतुल्य **Binary number = $(1011001)_2$**

2. **Binary को Decimal में बदलना :**
   Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाई ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण –

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

अब

$(1011001)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \times 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \; \{2^0 = 1\} = 89$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण –

2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल –

$2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या = (3+1) (1+1) (1+1) (1+1)

= 4 × 2 × 2 × 2 = 32

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. **जब संख्या घात (Power) के रूप में हो**
   जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा।
   जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना षेश प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः विभाजित हो जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।

2. **सरलीकरण के रूप में हो**
   प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो
   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा।
2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

n विषम होने पर भाजक → (a–b)

n सम होने पर भाजक → (a – b) या (a + b) या दोनों।

(i) $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

(ii) $a^n \div (a+1)$ $\begin{cases} \text{यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा} \\ \text{यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा} \end{cases}$

(iii) $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा

(iv) $(a^n + a) \div (a+1)$ $\begin{cases} \text{यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा।} \\ \text{यदि n विषम हो, तो शेषफल (a-1) होगा।} \end{cases}$

रोमन पद्धति के संकेतक

1	→	I	20	→	XX
2	→	II	30	→	XXX
3	→	III	40	→	XL
4	→	IV	50	→	L
5	→	V	100	→	C
6	→	VI	500	→	D
7	→	VII	1000	→	M
8	→	VIII			
9	→	IX			
10	→	X			

विभाज्यता के नियम

संख्या	नियम
2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	यदि दी गयी संख्या के इकाई अंक का दुगुना बाकी संख्या (इकाई का अंक छोड़कर) से घटाने पर प्राप्त संख्या 7 से विभाजित है तो पूरी संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी। अथवा किसी संख्या में अंको की संख्या 6 के गुणज में हो तो संख्या 7 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	किसी संख्या में एक ही अंक 6 बार दोहराए या अन्तिम अंक को 4 से गुणा करके शेष संख्या (इकाई अंक छोड़कर) में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 17784

अभ्यास प्रश्न

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किसी संख्या का 3/4 उस संख्या के 1/6 से 7 अधिक है, तो उस संख्या 5/3 क्या होगा?

(a) 12 (b) 18
(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b, उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$
(c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

(a) 1350 (b) 1250
(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का 5/16 ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का 5/6 ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये।

(a) 300 (b) 480
(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48
(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 64329 को जब किसी सख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते है तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224
(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2 $(3^{25}+3^{26}+3^{27}+3^{28})$ विभाजित है।

(a) 11 (b) 16
(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है। तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706
(b) 2796
(c) 2736
(d) 2826

उत्तर (c)

इकाई अंक निकालना आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $416\times333+2167\times118-114\times133$ के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

कितना है ?

(a) 0 (b) 2
(c) 3 (d) 5

प्राकृतिक संख्याओं के squre/cube के योग एवं अंतर पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $(11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 20^2) = ?$

(a) 385 (b) 2485

(c) 2870 (d) 3255

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = ?$

दशमलव संख्या आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016\times0.025}{0.325\times0.05}\div\frac{0.1216\times0.105\times0.002}{0.08512\times0.625\times0.039}+\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$$

उसका उत्तर $\frac{19}{10}$ था। उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2 $\frac{0.\overline{936}-0.\overline{568}}{0.\overline{45}+2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

शून्य की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left(1^1\times2^2\times3^3\times4^4\times...........\times98^{98}\times99^{99}\times100^{100}\right)$ के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200 (b) 1300

(c) 1500 (d) 1600

उदा.2 1 × 2 × 3 × ...... × 250 को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करने पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 निम्न मे से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बड़ी संख्या हैं।

$(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$

(a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1

(c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

आरोही/अवरोही क्रम आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को बढ़ते क्रम में लिखने पर –

(a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ –

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$ को अवरोही क्रम में लिखिये ?

गुणनखंडों की संख्या पर आधारित

प्रश्नों के हल

उदा.1 $\left\{(127)^{127}+(97)^{127}\right\}$ तथा $\left\{(127)^{97}+(97)^{97}\right\}$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

(a) 127 (b) 97

(c) 30 (d) 224

उदा.2 $\frac{(18)^{15}\times(75)^{16}\times(42)^{14}}{(35)^{12}\times(12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड है ?

2
CHAPTER

वर्ग और वर्गमूल

- किसी संख्या का वर्ग वह संख्या है, जो स्वयं या उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

  Eg. 8 x 8 = 64

  64, 8 का वर्ग है, क्योंकि 8 को 8 से गुणा करेन पर 64 प्राप्त होता है।
- 1, 4, 9, 16, 25……. वर्ग संख्याएँ है, ये पूर्ण वर्ग संख्याएँ कहलाती है।
- दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच में कोई भी संख्या किसी भी संख्या का वर्ग नहीं होती है।

  Eg. दो क्रमागत वर्ग संख्या 4 और 9 के बीच स्थित 4, 6, 7, 8 संख्याएँ किसी भी संख्या का वर्ग नहीं है।
- सभी वर्ग संख्याओं के अन्त में इकाई के स्थान पर 0,1, 4, 5, 6 या 9 होता है।
- यदि एक संख्या के इकाई के स्थान पर 1 या 9 आता है, तब वर्ग संख्या के अंत में 1 आयेगा।
- यदि एक संख्या के इकाई के स्थान पर 4 या 6 आता है, तब वर्ग संख्या के अन्त में 6 आयेगा।
- वर्ग संख्या के अन्त में शुन्यों की संख्या केवल सम होती है।

क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग –

- किसी भी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते है।

  Eg. $5^2 = 25 = 12 + 13, 7^2 = 49 = 24 + 25$
- दो क्रमागत विषम संख्याओं के गुणनफल में एक जोड़ने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

  Eg. 15 x 17 = 255 + 1 = 256

  $$\sqrt{256} = 16$$
- दो क्रमागत सम संख्याओं के गुणनफल में भी 1 जोड़ने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

  Eg. 22 x 24 = 528 + 1 = 529 = $(23)^2$
- **वर्गमूल** – किसी संख्या का वर्गमूल वह है जिसे स्वयं से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है।

  Eg. x के वर्गमूल को $\sqrt{x}$ से गुणा करते है।
- एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल प्राप्त होते है।

  Eg. $3^2 = 9,\ \sqrt{9} = 3$
- एक पूर्ण संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल प्राप्त होते है।

  Eg. $3^2 = 9,\ \sqrt{9} = 3$
- एक पूर्ण संख्या में यदि x अंक है तो उसके वर्गमूल में $\frac{x}{2}$ अंक होगें। यदि x सम है या $\frac{x+1}{2}$ अंक होगें, यदि x विषम है।

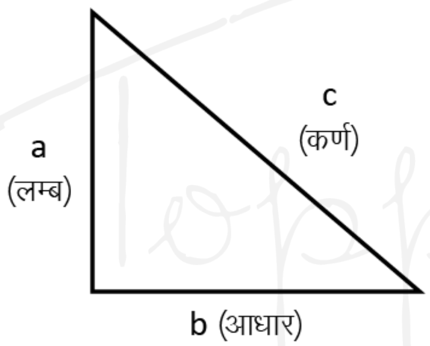
Eg. निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए ।

(i) $42 = (40+2)^2$
$$= 40\,(40+2) + 2(40+2)$$
$$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$$
$$= 1600 + 80 + 80 + 4$$
$$= 1764$$

वर्ग तथा वर्गमूल तालिका

Square	Square Root	Square	Square Root
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$21^2 = 441$	$\sqrt{441} = 21$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$22^2 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$23^2 = 529$	$\sqrt{529} = 23$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$24^2 = 576$	$\sqrt{576} = 24$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$25^2 = 625$	$\sqrt{625} = 25$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$	$26^2 = 676$	$\sqrt{676} = 26$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$	$27^2 = 729$	$\sqrt{729} = 27$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$	$28^2 = 784$	$\sqrt{784} = 28$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$	$29^2 = 841$	$\sqrt{841} = 29$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$	$30^2 = 900$	$\sqrt{900} = 30$

- **पाइथोगोरस प्रमेय** – दो संख्याओं के वर्गों का योग तीसरी संख्या के वर्ग के बराबर होता है।



कर्ण² = लम्ब² + आधार²

लम्ब² = कर्ण² – आधार²

आधार² = कर्ण² – लम्ब²

उदा. 1 **The value of**

$$\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+\sqrt{49}}}}} \text{ is}$$

(1) 3 (2) 9

(3) 7 (4) 5

हल $\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+7}}}}$

$= \sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+6}}}$

$= \sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{25}}}$

$= \sqrt{5+\sqrt{11+5}} = \sqrt{5+4}$

$= \sqrt{9} = 3$

उदा. 2 यदि **$(102)^2 = 10404$** है, तो

$\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$

का मान किसके बराबर है ?

(a) 0.306 (b) 0.0306

(c) 11.122 (d) 11.322

हल (d) According to the Question.

$= \sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$

$= \sqrt{\frac{10404}{100}} + \sqrt{\frac{10404}{10000}} + \sqrt{\frac{10404}{1000000}}$

$= \frac{102}{10} + \frac{102}{100} + \frac{102}{1000}$

= 10.2 + 1.02 + 0.102 = 11.322

उदा. 3 920 में कम से कम क्या जोडें कि योगफल एक पूर्ण वर्ग हो ?

(a)31 (b) 39

(c) 41 (d) 49

हल स्पष्ट है कि $(30)^2 < 920 < (31)^2$ जोडे जानी वाली संख्या $= (31)^2 - 920 = (961-920) = 41$.

3 CHAPTER

घन और घनमूल

- सम संख्याओं का घन एक सम संख्या होती है।
- विषम संख्याओं का घन एक विषम संख्या होती है।
- क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ने पर एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त होती है।

$1 = 1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$

$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$

$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$

$= 216 = 6^3$

घन और घनमूल तालिका

Cube	Cube Root	Cube	Cube Root
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$16^3 = 4096$	$\sqrt[3]{4096} = 16$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$17^3 = 4913$	$\sqrt[3]{4913} = 17$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$18^3 = 5832$	$\sqrt[3]{5832} = 18$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$19^3 = 6859$	$\sqrt[3]{6859} = 19$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$20^3 = 8000$	$\sqrt[3]{8000} = 20$
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$21^3 = 9261$	$\sqrt[3]{9261} = 21$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$22^3 = 10648$	$\sqrt[3]{10648} = 22$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$23^3 = 12167$	$\sqrt[3]{12167} = 23$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$	$24^3 = 13824$	$\sqrt[3]{13824} = 24$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$25^3 = 15625$	$\sqrt[3]{15625} = 25$
$11^3 = 1331$	$\sqrt[3]{1331} = 11$	$26^3 = 17576$	$\sqrt[3]{17576} = 26$
$12^3 = 1728$	$\sqrt[3]{1728} = 12$	$27^3 = 19683$	$\sqrt[3]{19683} = 27$
$13^3 = 2197$	$\sqrt[3]{2197} = 13$	$28^3 = 21952$	$\sqrt[3]{21952} = 28$
$14^3 = 2744$	$\sqrt[3]{2744} = 14$	$29^3 = 24389$	$\sqrt[3]{24389} = 29$
$15^3 = 3375$	$\sqrt[3]{3375} = 15$	$30^3 = 27000$	$\sqrt[3]{27000} = 30$

किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड तीन बार आता है। तो वह एक पूर्ण घन बन जाती है।

$512 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 8^3$

$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$

उदा. 1 **The value of $\left(\sqrt{4^3 + 15^2}\right)^3$ का मान क्या है ?**

(a) 4913 (b) 4313

(c) 4193 (d) 3943

हल (a) $\left(\sqrt{4^3 + 15^2}\right)^3$

$= \left(\sqrt{64 + 225}\right)^3$

$= \left(\sqrt{289}\right)^3$

$= (17)^3 = 4913$

उदा. 2 **175616 का घनमूल 56 है, तो** $\sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$ **का मान ज्ञात करें।**

(a) 0.168 (b) 62.16

(c) 6.216 (d) 6.116

हल According to the Question

$= \sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$

$= \sqrt[3]{\frac{175616}{1000}} + \sqrt[3]{\frac{175616}{1000000}} + \sqrt[3]{\frac{175616}{1000000000}}$

$= \frac{56}{10} + \frac{56}{100} + \frac{56}{1000}$

$= 5.6 + 0.56 + 0.056 = 6.216$

उदा. 3 **सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक n जिसके लिए 864n एक पूर्ण घन है :**

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

हल (b)

2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

$\therefore 864 = 2^3 \times 3^3 \times 2^2$

For $864n$ to be a perfect cube, $n = 2$

उदा. 3 **710** में कौन सी छोटी से छोटी संख्या जोड़ी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

(a) 29 (b) 19

(c) 11 (d) 21

हल (b) Clearly, $\sqrt[3]{729} = 9$

$\therefore$ एक पूर्ण घन प्राप्त करने के लिए 19 को 710 में जोड़ा जाना चाहिए।

4
CHAPTER

समीकरण

परिभाषा – दो व्यंजकों के बीच '=' का चिन्ह्न लगाकर उनकी समानता व्यक्त की जाए तो वह पद समीकरण कहलाता है।

- **सरल समीकरण** – समीकरण में यदि एक ही चर राशि हो और वह केवल प्रथम घात की भी हो तो उसे सरल समीकरण कहते है।
- अज्ञात राशि अर्थात् चर के जिस मान से कोई समीकरण संतुष्ठ हो जाता है, उसे मूल समीकरण कहते है।
- एक चर राशि वाली रेखीय समीकरण का एक ही मूल होता है। अर्थात् चर राशि का केवल एक मान ही समीकरण को संतुष्ट कर सकता है।
- समीकरण के दो पक्ष होते है। बराबर (=) के चिन्ह्न के बांयी ओर के पद को वाय पद (LHS) तथा दांयी ओर के पद को दक्षिण पद (RHS) कहते है।
- किसी समीकरण के + चिन्ह्न वाले पद को दूसरे पक्ष में ले जाने पर वह – चिन्ह्न हो जाता है और – चिन्ह्न वाले पद को दूसरे पक्ष में ले जाने पर + चिन्ह्न का हो जाता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य –

1. तीन क्रमागत संख्याएँ – $x, x+1, x+2$
2. तीन क्रमागत सम संख्याएँ – $x, x+2, x+4$
3. तीन क्रमागत विषम संख्याएँ – $x, x+1, x+3$ आदि।
4. समीकरण को हल करने के लिए दोनों पदों में समान राशि को जोड़ा या घटाया जा सकता है तथा गुणा–भाग भी कर सकते है।
5. समीकरण में अज्ञात राशि की उच्चतम घात को समीकरण की घात कहते है।
6. सरल समीकरण में बांया पक्ष x या अज्ञात राशि के लिए रहता है तथा दांया पख ज्ञात राशि या गिनती के लिए रहता है। पक्षान्तरण में उस पद का चिन्ह्न बदलकर पक्षान्तरण करते है।

Eg. $\frac{3}{2}x = -54$ **समीकरण को हल कीजिए –**

$3x = -108$

$x = \frac{-108}{3} = -36$

Eg. $\frac{x}{9} = 5$ **को हल कीजिए।**

$\frac{x}{9} = 5$ दोनों पक्षों को 9 से गुणा करने पर

$\frac{x}{9} \times 9 = 5 \times 9$

$x = 45$

Eg. किसी संख्या के दुगुने में 9 जोड़ने पर 77 प्राप्त होता है, वह संख्या ज्ञात कीजिए।

माना वह संख्या x है।

$2x + 9 = 77$

$2x = 77 - 9 = 68$

$x = \frac{68}{2} = 34$

Eg. यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गों का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

(a) 40 (b) 44

(c) 80 (d) 89

<u>**हल**</u> प्रश्न के अनुसार

$x + y = 22$ .... (i)

$x^2 + y^2 = 404$ .... (ii)

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$(22)^2 = 404 + 2xy$

$484 = 404 + 2xy$

$2xy = 80$

$xy = 40$

Eg. एक पर्यटक प्रतिदिन उतने ही रूपये खर्च करता है जितने उसके पर्यटन के दिनों की संख्या है । उसका कुल खर्च रू. **361** है, तो ज्ञात करें कि उसका पर्यटन कितने दिनों तक चला ?

(a) 17 days (b) 19 days

(c) 21 days (d) 31 days

हल (b) माना दिनों की संख्या = x

प्रश्न के अनुसार

$x \times x$ = 361

x^2 = 361

x = 19 days

5 CHAPTER बीजगणित (Algebra)

चर राशियाँ (Variable) – वे राशियाँ जिसका मान स्थिर न होकर बदलता रहता है, चर राशियाँ कहलाती है। शब्द 'चर' का अर्थ है कि वह राशि जो परिवर्तित (Vary) होती रहती है।
चर राशियों को प्रतीक चिन्ह अथवा संकेत द्वारा प्रदर्शित किया जाता हे।
जैसे – x, y, z, a, b, c आदि।

अचर राशियाँ (Constant) – जिन राशियों का मान स्थिर होता है वह अचर राशियाँ कहलाती है।
जैसे – अंकगणित संख्याएँ 0, 1, 2, 3.................

समान तथा असमान पद (Like and Unlike Terms)
– सजातीय पद – वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड समान हों, समान पद अथवा सजातीय पद कहलाते है। इसमें चर तथा उनकी घात समान होती है केवल उनका संख्यात्मक मान भिन्न होता है।
जैसे – $5y^2$ व $25y^2$
जैसे – $3xy - 5x^2 + 4xy + 3x^2 - 4x$ में $3xy$ तथा $4xy$ समान पद और $-5x^2$ तथा $3x^2$ समान पद है।

विजातीय पद – वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड असमान हो, असमान पद अथवा विजातीय पद कहलाते हैं इनमें चर तथा उनकी घार असमान होती है।
जैसे – $3xy$ तथा $-5x^2$ असमान पद।

गुणांक (Coefficient) – पद का कोई भी गुणनखण्ड, पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है। किसी बीजीय पद को उसके गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। इसका संख्यात्मक गुणनखण्ड, संख्यात्मक गुणांक अथवा अचर गुणांक कहलाता है।
$4x^2y$ में x^2 का गुणांक $= 4y$
$4x^2y$ में x^2y का अचर गुणांक $= 4$

बहुपद
$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2$ .... a_nx^n
जहाँ a_0, a_1, a_2, a_n = वास्तविक संख्या है।

- Variable (चर) x की power (घात) हमेशा धनात्मक होगी।
- **<u>कोटि (Degree)</u>** – अधिकतम घात (बहुपद में Variable की) ही कोटि होगी।
  उदाहरण
  $x^2 + x^3 + 1$, यहाँ कोटि 3 होगी।
  समघातीय व्यंजक की घात–
  $ab + ac + ca$
  'a' या 'b' 'ab' यहां Degree- 2 होगी।
- Degree गुणा में जुडती है तथा भाग में घटती है।
- जोडने व घटाने पर पदों की Degree में फर्क नहीं पडता।

<u>नोट</u> – प्रश्न में पद की जो घात है, उत्तर में भी पद की वही घात रहेगी।

बहुपद के प्रकार

पदो के आधार पर

(1) एकपदी बहुपद – जिसमें केवल एक पद हो।
जैसे – $5x^2y^2, 3x$

(2) द्विपदी बहुपद – जिसमें केवल दो पद हो।
जैसे – $7x^2 + 5y$

(3) त्रिपदी बहुपद – जिसमें केवल तीन पद हो।
जैसे – $4x^2 + 7xy + 3y^2$

घात के आधार पर

(1) रैखिक बहुपद – जिस बहुपद के चर x की घात 1 है, उसे रैखिक या एक घातीय बहुपर कहते हैं।
जैसे – $4x + 2$

(2) द्विघात बहुपद – जिस बहुपद के चर x का उच्चतम मान 2 है।
जैसे – $x^2 + x + 2$

(3) त्रिघात बहुपद – जिस बहुपद के चर x की उच्चतम घात 3 हो उसे त्रिघात बहुपद कहते है।
जैसे – $ax^3 + bx^2 + cx + d$

(4) शून्य बहुपद – जिसके सभी गुणांक शून्य हो।
जैसे – $2x^0, 5, 19$ आदि।

बहुपद के शून्यक (Zeroes of Polynomial) – जब किसी बहुपद का मान चर के किसी मान के लिए शून्य हो जाता है तो चर का मान बहुपद का शून्यक कहलाता है।

जैसे – बहुपद p(x) = 2x + 1 में $x=-\frac{1}{2}$ रखने पर

$$p\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-1+1=0$$

अतः $-\frac{1}{2}$, p(x) का एक शून्यक है।

जैसे – $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f(1) = (1)^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

अतः 1 बहुपद f(x) का शून्यक है।

बहुपद f(x) के शून्यकों की अधिकतम संख्या, बहुपद की घात के बराबर होती है किन्तु यह आवश्यक नहीं कि बहुपद के सभी शून्यक वास्तविक हो –

जैसे – $f(x) = x^2 + x + 1$ का कोई वास्तविक शून्यक नहीं

$f(x) = x^2 + 9$ का कोई वास्तविक शून्यक नहीं

द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)

1. द्विघात समीकरण – जिस समीकरण में चर राशि का अधिकतम मान 2 हो उसे द्विघात समीकरण कहते है। एक बीजगणितीय व्यंजक जो इस प्रकार है : $ax^2 + bx + c = 0$

   जहाँ $a \neq 0, b, c \in R$ को द्विघात समीकरण कहते हैं।

द्विघात समीकरण के गुणनखंड की शर्ते

a) दिया हुआ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx\ c = 0$ है जहाँ a, b व c वास्तविक संख्याएँ है।

b) यदि $b^2 - 4ac > 0$ इस स्थिति में गुणनखण्ड निकाले जा सकते है।

c) यदि $b^2 - 4ac < 0$, इस स्थिति में गुणनखण्ड नहीं हो सकते है।

द्विघात समीकरण के मूल (Roots of Quadratic Equation)

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल α [वास्तविक या समिश्र (जटिल)] इस प्रकार है कि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, तब $(x - \alpha)$, $ax^2 + bx + c$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

मूलों का योग व गुणनफल

मूलों का योग व गुणनफल – माना दो मूल α, β हैं तब

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ और } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

मूलों का योग $=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

मूलों का गुणनफल $=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

तो, $ax^2 + bx + c = 0$ को हम लिख सकते हैं –

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\left(\frac{-b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

- यदि मूल α व β एक–दूसरे के व्युत्क्रम है तो a = c
- यदि α व β का मान आपस में बराबर तथा चिन्ह विपरीत है, तो b = 0
- यदि a, b व c परिमेय संख्याएँ है तथा $a+\sqrt{b}$ द्विघात समीकरण का एक मूल है, तो दूसरा मूल इसके संयुग्मी $a-\sqrt{b}$ तथा विपरीत होगा।

उदा. 1 द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए यदि एक मूल $3+\sqrt{3}$ है ?

व्याख्या यदि एक मूल $3+\sqrt{3}$ है, तो इसका दूसरा मूल $3-\sqrt{3}$ होगा।

मूलों का योग $=\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)=6$

मूलों का गुणनफल $=\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=6$

सूत्र प्रयोग से

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलो की प्रकृति का निर्धारण, D (Determinant) द्वारा किया जाता है ।

जहाँ $D = b^2 - 4ac$ द्वारा निकाला जाता है ।

(i) यदि D = 0 (मूल वास्तविक एवं समान)

(ii) यदि D > 0 (मूल वास्तविक एवं असमान)

(iii) यदि D < 0 (मूल काल्पनिक)

<u>शेषफल प्रमेय</u> – यदि f(x) एक कोई बहुपद है जहाँ $n \geq 1$ तथा a कोई वास्तविक संख्या है। जब f(x) को (x – a) से विभाजित किया जाता है तो f(a) शेषफल आता है। (n यहाँ डिग्री है)

1. यदि f(x) को (x + a) से विभाजित किया जाता है तो शेष होगा = f(–a)
2. यदि f(x) को (ax + b) से विभाजित किया जाता है तो शेष बचेगा = $f\left(-\frac{b}{a}\right)$
3. यदि f(x) को (ax – b) से विभाजित किया जाता है तो शेष $= f\left(\frac{b}{a}\right)$

उदा.1 भाग की क्रिया का इस्तेमाल किए बिना $(x^3 + 4x^2 + 6x - 2) \div (x + 5)$ का शेष ज्ञात कीजिए ?

हल $x + 5 = 0$

$x = -5$ अतः शेष f(-5) होगा

अब

$x^3 + 4x^2 + 6x - 2$ में मान रखने पर

$(-5)^3 + 4(-5)^2 + 6(-5) - 2$

$-125 + 100 - 30 - 2 = -57$

गुणनखण्ड प्रमेय – माना f(x) एक बहुपद है एवं a एक वास्तविक संख्या है तब –

(i) यदि f(a) = 0 तो (x-a), f(x) का एक गुणनखण्ड होगा ।

(ii) यदि (x–a), f(x) का एक गुणनखण्ड है तो f(a) = 0

उदा.2 यदि $f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ तो क्या (x – 2) एवं (x – 3), f(x) के गुणनखण्ड है ?

हल (i) f(a) = 0

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 2^3 - 12 \times 2^2 + 44 \times 2 - 48$

$= 8 - 48 + 88 - 48$

$= 0$

अतः (x - 2), f(x) का गुणनखण्ड है ।

(ii) f(a) = 0

$x - 3 = 0$

x = 3 रखने पर

$f(3) = 3^3 - 12 \times 3^2 + 44 \times 3 - 48$

$= 27 - 108 + 132 - 48$

$f(3) = -13 \neq 0$

अतः (x – 3), f(x) का गुणनखण्ड नहीं है ।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
2. $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$
3. $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,(A+B)$
4. $(A-B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB\,(A-B)$
5. $(A^2 - B^2) = (A+B)(A-B)$
6. $A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB\,(A+B)$
7. $A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB\,(A-B)$
8. $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)\,(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)$
9. $(A+B+C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3\,(B+C)(C+A)(A+B)$
10. $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$
11. $A^2 - B^2 = (A-B)^2 + 2AB$
12. यदि $A+B+C=0$ हो तो $A^3 + B^3 + C^3 = 3\,ABC$ or A = B = C
13. $x^2 + x(A+B) + AB = (x+A)(x+B)$
14. $A^2(B+C) + B^2(C+A) + C^2(A+B) + 3ABC = (A+B+C)(AB+BC+CA)$
15. $(A+B)\,(B+C)(C+A) = AB\,(A+B) + BC(B+C) + CA(C+A) + 2ABC$
16. $(A-B)\,(B-C)(C-A) = A^2(B-C) + B^2(C-A) + C^2(A-B)$
17. $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,(AB + BC + CA)$

बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ

(1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

(2) यदि $x + \frac{1}{x} = a$

तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$$

(3) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

(4) यदि $x - \frac{1}{x} = a$

तब $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 + 4a^2 + 2$$

(5) यदि $a + \frac{1}{a} = 2$

तब $a^n + \frac{1}{a^n} = 2$ (हमेशा)

(6) यदि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ तब a + b + c = 0 तथा a = b = c

(7) यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ तब a = b = c