Toppersnotes
Unleash the topper in you

RPSC

सहायक आचार्य

ABST

राजस्थान लोक सेवा आयोग, अजमेर

पेपर – 2 || भाग – 2

SIERRA INNOVATIONS

RPSC Assistant Professor Paper – 2 (Commerce)

S.No.	Chapters	Pg.No.
	व्यावसायिक सांख्यिकी और संचालन अनुसंधान (Business Statistics and Operation Research)	
1.	आँकड़ों के प्रकार एवं संकलन	1
2.	संगणना विधि और प्रतिचयन विधि में अंतर	2
3.	आँकड़ों का सारणीयन (Data Tabulation)	3
4.	सांख्यिकीय श्रेणियाँ (Statistical Series)	4
5.	सांख्यिकीय श्रेणियों के माप	15
6.	समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)	15
7.	गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)	22
8.	हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)	22
9.	माध्यिका (Median)	23
10.	अपकिरण	33
11.	प्रसरण (Variance)	40
12.	विषमता [Skewness]	46
13.	सहसंबंध (Correlation)	50
14.	प्रतीपगमन (Regression)	62
15.	प्रतिचयन/निदर्शन [Sampling]	70
16.	प्रतिचयन प्रक्रिया [Sampling Procedure]	71
17.	प्रतिचयन/निदर्शन की विधियाँ [Methods of Sampling]	72
18.	खेल सिद्धांत (Game Theory)	109
19.	महत्व परीक्षण (Test of Significance)	111
20.	सैद्धांतिक आवृत्ति वितरण (Theoretical Frequency Distributions)	114
21.	संभाव्यता (Probability)	116
22.	विविधता का विश्लेषण (Analysis of Variance - ANOVA) और प्रयोगों का डिज़ाइन (Design of Experiments)	118
23.	नेटवर्क विश्लेषण – PERT और CPM (Network Analysis – PERT and CPM)	121

1
CHAPTER

व्यावसायिक सांख्यिकी और संचालन अनुसंधान

<u>आँकड़ों के प्रकार एवं संकलन</u>

- आँकड़े (Data) उन सूचनाओं या तथ्यों का वितरण होते हैं, जो किसी विशिष्ट क्षेत्र में एकत्रित किए जाते हैं। सांख्यिकी में आँकड़ों का विश्लेषण और अध्ययन संख्यात्मक रूप में किया जाता है, ताकि हम किसी भी विषय पर गहरी समझ प्राप्त कर सकें।
- **आँकड़ों के संग्रहण के आधार पर आँकड़ों को दो प्रकारों में बाँटा जाता है:**

1. प्राथमिक आँकड़े (Primary Data):

- **विवरण:** ये वे आँकड़े हैं जो अनुसंधानकर्ता या प्रेक्षक पहली बार एकत्र करता है। इन आँकड़ों को एकत्रित करने के लिए प्रेक्षक खुद अथवा अनुसंधानकर्ता अपने क्षेत्र में जाकर डाटा संग्रह करता है। यदि पहले से किसी विषय से संबंधित आँकड़े एकत्र किए गए होते हैं, और अनुसंधानकर्ता उन्हे पुनः एकत्र करके उपयोग करता है, तो इन्हें भी प्राथमिक आँकड़े माना जाता है।
- **संग्रहण विधियाँ:**

    1. **व्यक्तिगत साक्षात्कार या प्रत्यक्ष प्रेक्षण:** इस विधि में प्रेक्षक खुद क्षेत्र में जाकर आंकड़े एकत्र करता है। यह विधि छोटी और सीमित क्षेत्र के लिए उपयुक्त होती है। समय और धन अधिक लगता है, लेकिन आँकड़े विश्वसनीय होते हैं। भारत में इस विधि का प्रयोग आर्थर सँग व यूरोप में लिप ले द्वारा की गई।
    2. **अप्रत्यक्ष साक्षात्कार:** इस विधि में प्रेक्षक स्वयं डेटा इकट्ठा नहीं करता, बल्कि उनसे संबंधित व्यक्तियों से जानकारी प्राप्त करता है। उदाहरण के लिए, छात्रों की प्रगति के बारे में शिक्षक से जानकारी लेना। इस विधि में लापरवाही या पक्षपाती जानकारी हो सकती है, लेकिन यह व्यापक क्षेत्र में उपयोगी होती है।
    3. **सूचना स्रोत से संकलन (संपर्ककर्ता द्वारा):** इस विधि में प्रेक्षक स्थानीय संवाददाताओं से डेटा एकत्र करता है जो बाद में शोधकर्ता को भेजते हैं। यह विधि समय, धन और श्रम की दृष्टि से कम खर्चीली होती है, लेकिन आँकड़े कभी-कभी अविश्वसनीय हो सकते हैं।
    4. **प्रश्नावली विधि:** इसमें प्रश्नावली विभिन्न व्यक्तियों को भेजी जाती है, जो प्रेक्षक को उत्तर भेजते हैं। यह विधि व्यापक क्षेत्र के लिए उपयुक्त है और इसमें आँकड़ों की शुद्धता रहती है।
    5. **अनुसूची विधि:** यह विधि प्रशिक्षित प्रेक्षकों द्वारा प्रश्न पूछकर आँकड़े एकत्र करने के लिए उपयोगी है। सीमित क्षेत्र में उपयोगी है, लेकिन समय और धन अधिक लगता है। इसके द्वारा प्राप्त आँकड़े विश्वसनीय होते हैं।

2. द्वितीयक आँकड़े (Secondary Data)

- **द्वितीयक आँकड़े** वे आँकड़े होते हैं जो पहले से किसी संस्था, संगठन, या शोधकर्ता द्वारा एकत्रित किए गए होते हैं और बाद में इन्हें किसी अन्य प्रेक्षणकर्ता द्वारा उपयोग में लिया जाता है।

- **लाभ:** इन आँकड़ों का संकलन करते समय समय, धन और श्रम की बचत होती है।
- **नुकसान:** इन आँकड़ों की शुद्धता पर विचार करना आवश्यक होता है क्योंकि यदि पहले से आँकड़े एकत्रित करने में कोई त्रुटि हुई हो, तो वे अविश्वसनीय हो सकते हैं।

द्वितीयक आँकड़ों के प्राप्ति स्रोत:

1. **प्रकाशित स्रोत:**
   - यह वे आँकड़े होते हैं जो सरकारी, अर्द्धसरकारी और निजी संगठनों द्वारा प्रकाशित किए जाते हैं। इनमें अन्तर्राष्ट्रीय संगठनों, समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं, और व्यक्तिगत अनुसंधान द्वारा प्रकाशित आँकड़े शामिल होते हैं।
2. **अप्रकाशित स्रोत:**
   - यह वे आँकड़े होते हैं जो सरकारी और अर्द्धसरकारी संस्थाएँ या संगठन स्वयं एकत्रित करते हैं और उन्हें रिकॉर्ड या अभिलेख के रूप में अपने पास रखते हैं। बाद में, ये आँकड़े अनुसंधानकर्ता द्वारा उपयोग किए जा सकते हैं।
3. **अवशेष (Archives):**
   - ये आँकड़े उन क्षेत्रों से संबंधित होते हैं जैसे पुरातत्व, भूगर्भशास्त्र, मानवशास्त्र इत्यादि, जिसमें पहले से एकत्रित आँकड़ों का उपयोग अन्य शोधकर्ताओं द्वारा किया जाता है।

द्वितीयक आँकड़ों का संकलन:

1. **संगणना विधि (Census Method):**
   - इस विधि में अनुसंधानकर्ता संबंधित समूह की प्रत्येक इकाई को सर्वेक्षण में शामिल करता है। जैसे कि जनगणना, पशुगणना, फसल गणना आदि। यह विधि अधिक समय और धन की आवश्यकता होती है, लेकिन इससे प्राप्त आँकड़े अधिक शुद्ध और विश्वसनीय होते हैं।
2. **प्रतिचयन/नमूना विधि (Sampling):**
   - इस विधि में अनुसंधानकर्ता संबंधित समूह की सभी इकाइयों को सर्वेक्षण में शामिल नहीं करता, बल्कि कुछ इकाइयों का चयन करता है जिन्हें प्रतिदर्श या नमूना कहा जाता है।
   - यह विधि समय, धन और श्रम की बचत करती है और यदि नमूने का सही चयन किया जाता है, तो इसके परिणाम संगणना विधि के समान ही हो सकते हैं।

संगणना विधि और प्रतिचयन विधि में अंतर:

संगणना विधि (Census Method)

- **सभी इकाइयों से सूचना प्राप्त की जाती है**: इस विधि में संबंधित समूह की प्रत्येक इकाई को सर्वेक्षण में शामिल किया जाता है, जिससे पूरी जनसंख्या की जानकारी प्राप्त होती है।
- **सीमित और छोटे क्षेत्र के लिए उपयोगी**: यह विधि सामान्यतः छोटे और सीमित क्षेत्रों में प्रभावी होती है।
- **समय, धन और श्रम की अधिक आवश्यकता होती है**: चूँकि इस विधि में सभी इकाइयों को शामिल किया जाता है, यह समय, धन और श्रम अधिक खर्च करती है।

- **विभाजित इकाइयों के अध्ययन के लिए उपयुक्त है:** जब किसी क्षेत्र में विभिन्न प्रकार की इकाइयाँ होती हैं, तो यह विधि सबसे उपयुक्त होती है।
- **आँकड़ों की अधिक शुद्धता:** चूँकि सभी इकाइयाँ सर्वेक्षण में शामिल की जाती हैं, परिणाम अधिक शुद्ध और विश्वसनीय होते हैं।
- **यह विधि कम लोकप्रिय है:** क्योंकि यह विधि अधिक समय और संसाधनों की मांग करती है, इसे हर जगह प्रयोग में लाना मुश्किल हो सकता है।

प्रतिचयन विधि (Sampling Method)

- **चयनित इकाइयों से सूचना प्राप्त की जाती है:** इस विधि में पूरे समूह के बजाय कुछ इकाइयों का चयन किया जाता है, और उनसे जानकारी प्राप्त की जाती है।
- **विस्तृत और बड़े क्षेत्र के लिए उपयोगी:** यह विधि बड़े और विस्तृत क्षेत्रों में प्रयोग की जाती है, जहाँ संपूर्ण जनसंख्या का सर्वेक्षण करना कठिन हो।
- **समय, धन और श्रम की कम आवश्यकता होती है:** चूँकि केवल कुछ इकाइयाँ चुनी जाती हैं, इस विधि में समय और संसाधनों की बचत होती है।
- **सजातीय इकाइयों के अध्ययन के लिए उपयुक्त है:** जब इकाइयाँ समान प्रकार की हों, तो यह विधि उपयुक्त होती है।
- **आँकड़ों की कम शुद्धता:** चूँकि सभी इकाइयाँ शामिल नहीं होतीं, परिणाम में कुछ असंगतियाँ हो सकती हैं।
- **यह विधि अधिक लोकप्रिय है:** यह विधि कम समय और संसाधनों में परिणाम प्राप्त करने के कारण अधिक लोकप्रिय है।

प्रतिचयन विधि का विकास:

20वीं शताब्दी के मध्य में इस विधि का विकास हुआ था। येट्स ने प्रतिदर्श ढाँचा (Sampling Design) प्रस्तुत किया और कोचरन ने इसकी प्रविधियाँ विकसित की हैं।

आँकड़ों का सारणीयन (Data Tabulation)

सांख्यिकी में आँकड़ों का सारणीयन महत्वपूर्ण है क्योंकि यह आँकड़ों को व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करता है, जिससे उनका विश्लेषण और समझना आसान हो जाता है।

आँकड़ों के सारणीयन का महत्व एवं उद्देश्य:

- अव्यवस्थित आँकड़ों को संक्षिप्त और व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत किया जाता है।
- सारणी में तथ्यों और सूचनाओं को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाता है कि उन्हें समझने और याद करने में आसानी हो।
- सारणी के माध्यम से आँकड़ों से रेखाचित्र बनाने में सहायता मिलती है।
- दो या दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने में मदद मिलती है।
- आँकड़ों को सारणी रूप में देखकर अशुद्धियों की पहचान की जा सकती है।
- सांख्यिकी विवेचन जैसे माध्य, माध्यिका, बहुलक, विषमता, सहसंबंध इत्यादि को आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।
- सारणी में आँकड़ों को प्रस्तुत करने से समय और संसाधनों की बचत होती है।

सारणी के प्रमुख भाग:

1. **सारणी संख्या (Table Number)**: सारणी के शीर्ष पर इसकी संख्या लिखी जाती है।
2. **शीर्षक (Title)**: सारणी का मुख्य शीर्षक छोटा और स्पष्ट होना चाहिए।
3. **उपशीर्षक (Sub-title/Caption)**: आवश्यकता होने पर शीर्षक के नीचे या सारणी के स्तंभों के ऊपर उपशीर्षक लिखा जाता है।
4. **अनु शीर्षक (Stubs)**: ये वह शीर्षक होते हैं जो पंक्तियों या स्तंभों के लिए लिखे जाते हैं।
5. **सारणी का मुख्य भाग (Main Body of Table)**: यह सारणी का वह भाग है जिसमें आंकड़े और प्रेक्षण लिखे जाते हैं।
6. **पदों को** क्रमशः **लिखना**: पंक्तियों और स्तंभों में प्रेक्षणों को स्थान, समय और अन्य कारकों के अनुसार व्यवस्थित तरीके से लिखा जाता है।
7. **टिप्पणी (Remarks)**: जब आवश्यक हो, तो सारणी के नीचे विस्तृत टिप्पणियाँ लिखी जाती हैं जो आँकड़ों को और स्पष्ट करती हैं।
8. **स्रोत (Source)**: प्रत्येक सारणी के अंत में इसके संकलन या संग्रह का स्रोत लिखा जाता है।

सारणी के प्रकार:

1. **उद्देश्य के आधार पर:**
   - **सामान्य उद्देश्य सारणी**: यह सारणी सूचनाओं या तथ्यों का संग्रहण करने के लिए प्रयोग की जाती है।
   - **विशेष उद्देश्य सारणी**: यह सारणी विशेष रूप से किसी विषय को प्रभावी ढंग से प्रस्तुत करती है।
2. **रचना के आधार पर:**
   - **सरल सारणी**: इसमें एक ही गुण या विशेषता प्रदर्शित की जाती है।
   - **जटिल सारणी**: इसमें एक से अधिक गुणों या विशेषताओं को प्रदर्शित किया जाता है। इसे विशेषताओं की संख्या के आधार पर निम्नलिखित भागों में विभाजित किया जाता है:
     - ✓ **द्विगुण सारणी**: दो विशेषताओं को प्रदर्शित किया जाता है।
     - ✓ **त्रिगुण सारणी**: तीन विशेषताओं को प्रदर्शित किया जाता है।
     - ✓ **बहुगुण सारणी**: कई विशेषताओं को एक साथ प्रदर्शित किया जाता है।
3. **मौलिकता के आधार पर:**
   - **मौलिक सारणी**: यह सारणी मूल आँकड़ों के आधार पर बनाई जाती है।
   - **व्युत्पन्न सारणी**: यह सारणी मूल आँकड़ों को अनुपात, प्रतिशत, औसत, गुणक आदि के रूप में परिवर्तित कर प्रस्तुत की जाती है।

सांख्यिकीय श्रेणियाँ (Statistical Series)

सांख्यिकी में आँकड़ों को एकत्रित कर उन्हें व्यवस्थित तरीके से प्रस्तुत करने के लिए उन्हें विभिन्न प्रकार की श्रेणियों में बांटा जाता है, ताकि उनका विश्लेषण किया जा सके।

आँकड़ों की श्रेणियों के प्रकार

1. **गुण के आधार पर सांख्यिकीय श्रेणियाँ:**

- **काल श्रेणी:** इसमें आँकड़ों को समय के अनुसार व्यवस्थित किया जाता है। उदाहरण के लिए, मासिक आय, वार्षिक बिक्री।
- **स्थान श्रेणी:** इसमें आँकड़ों को उनके भौगोलिक स्थान के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है। उदाहरण के लिए, विभिन्न देशों या राज्यों की जनसंख्या।
- **परिस्थिति या स्थिति श्रेणी:** इसमें आँकड़ों को किसी विशेष स्थिति या परिस्थिति में किए गए परिवर्तनों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। उदाहरण के लिए, विभिन्न वर्गों में छात्रों की लम्बाई या आयु।

2. **रचना या बनावट के आधार पर सांख्यिकीय श्रेणियाँ:**

- **व्यक्तिगत श्रेणी:** इसमें प्रत्येक आँकड़ा स्वतंत्र होता है और किसी विशेष समूह का हिस्सा नहीं होता। उदाहरण के लिए, एक कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की लम्बाई।
- **खण्डित/अवर्गीकृत श्रेणी:** इस श्रेणी में प्रत्येक आँकड़े का मूल्य आवृत्ति या बारम्बारता के रूप में लिखा जाता है। उदाहरण के लिए, विभिन्न विद्यार्थियों के प्राप्तांक।

मूल्य (प्राप्तांक)	आवृत्ति/बारम्बारता (विद्यार्थियों की संख्या)
6	7
8	9
11	5
13	3
22	6

- **अखण्डित/सतत्/वर्गीकृत श्रेणी:** इस श्रेणी में आँकड़ों को वर्गान्तरों में विभाजित किया जाता है और प्रत्येक वर्ग में आने वाले **आँकड़ों** की आवृत्तियाँ लिखी जाती हैं। उदाहरण के लिए, छात्रों के प्राप्तांक को 0-20, 20-40, 40-60 आदि वर्गों में विभाजित करना।

वर्गान्तर मूल्य/वर्ग अन्तराल	आवृत्ति/बारम्बारता
0-20	5
20-40	7
40-60	11
60-80	10
80-100	8

आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution)

- आवृत्ति वितरण में आँकड़ों के मूल्यों और उनकी आवृत्तियों को क्रमबद्ध रूप से प्रस्तुत किया जाता है। दो प्रकार के चर होते हैं:

1. **खण्डित चर** 2. **अखण्डित आवृत्ति बंटन**

1. **खण्डित चर**

- खण्डित चरों का मूल्य निश्चित होता है तथा इन चरों के बीच में कुछ अन्तर होता है और ये सामान्यत: पूर्णांक के रूप में होते हैं।
- खण्डित आवृत्ति बंटन में चर मूल्यों को उनकी आवृत्तियों के साथ व्यवस्थित किया जाता है। इस हेतु इन चर मूल्यों के सामने मिलान चिह्नों (टेली चिह्नों) को प्रदर्शित किया जाता है और कितनी बार चर आया है, गिनकर पद मूल्य की आवृत्ति लिख दी जाती है।
- यदि चरों का मूल्य पूर्णांकों के रूप में न हो तो उनकी बारम्बारता की संभावनाएँ सीमित हो जाती हैं, ऐसी स्थिति में अखंडित आवृत्ति बंटन की रचना की जाती है।
- यदि चर मूल्यों का विस्तार अत्यधिक हो तो भी अखण्डित आवृत्ति बंटन की रचना की जाती है।

2. **अखण्डित आवृत्ति बंटन -**

- अखण्डित आवृत्ति बंटन में वर्गान्तरों की संख्या एवं वर्गान्तरों का विस्तार इत्यादि को ज्ञात करने की निम्न विधियाँ हैं:

   (i) **वर्गान्तरों की संख्या -**

   ✓ सामान्यतः जो आँकड़े/तथ्य अव्यवस्थित होते हैं, उनके लिए यह निश्चित करना आवश्यक है कि इन प्रस्तुत आँकड़ों को उपयुक्त रूप से वर्गान्तरों में बाँटा जाए। इसका कोई निश्चित नियम नहीं है, लेकिन इस हेतु बनाए जाने वाले वर्गों की संख्या न तो बहुत ज्यादा होनी चाहिए और न ही बहुत कम। सामान्यतः किसी आवृत्ति बंटन में वर्गान्तरों की संख्या 5 या 6 से कम तथा 20 से अधिक नहीं होनी चाहिए।

   ✓ एच. ए. स्टर्जस ने वर्गान्तरों की संख्या ज्ञात करने के लिए एक सूत्र दिया है, जो निम्नलिखित है:

$$n = 1 + 3.322 \, log \, N$$
$$n = 1 + 3.322 \text{ लघुगणक } N$$

जहाँ,

✓ (n) = वर्गों की संख्या

✓ (N) = पदों की कुल संख्या

जैसे, यदि किसी सांख्यिकी श्रेणी में पदों की संख्या 60 है, तो इसमें वर्गों की संख्या स्टर्जस के सूत्र के अनुसार कितनी होगी:

स्टर्जस सूत्र:

$n = 1 + 3.22 \, log \, N$ यहाँ (N = 60) है, तो:

$$n = 1 + 3.322 \log N$$
$$n = 1 + 3.322 \times 1.778$$
$$= 1 + 5.907$$
$$= n = 6.907 \text{ या } 7$$

(ii) **वर्गान्तर विस्तार -**

- ✓ वर्गान्तरों की संख्या निश्चित होने के बाद वर्गान्तरों का विस्तार निश्चित किया जाता है और सभी वर्गों का अन्तर समान रखा जाता है।
- ✓ वर्गान्तर विस्तार ज्ञात करने के लिए, सर्वाधिक मूल्य में से सबसे कम मूल्य को घटाकर, वर्गों की संख्या से भाग दिया जाता है:

$$\text{वर्ग अन्तराल } (i) = \frac{\text{उच्चतम मान} - \text{न्यूनतम मान}}{\text{वर्गों की संख्या}}$$

$$i = \frac{L - S}{n} \text{ या } i = \frac{L - S}{1 + 3.322 \log N}$$

जहाँ,

- ✓ (L) = उच्चतम मान (highest value)
- ✓ (S) = न्यूनतम मान (lowest value)
- ✓ (n) = वर्गों की संख्या (number of classes)

वर्गान्तर बनाने की विधियाँ

अपवर्जी विधि [Exclusive Method]

- ➢ इस विधि में एक वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा, आगे वाले वर्ग-अन्तराल की निम्न सीमा होती है और इस विधि में वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा को उस वर्ग अन्तराल में शामिल नहीं किया जाता है, बल्कि इसे अगले वर्ग अन्तराल में शामिल किया जाता है।
- ➢ जैसे: - एक कक्षा में विद्यार्थियों के हिन्दी विषय के प्राप्तांकों को (0-20, 20-40, 40-60) इस प्रकार बाँटा गया है तो 20 अंक प्राप्त करने वाला विद्यार्थी (0-20) के वर्गान्तर में शामिल नहीं होकर (20-40) के वर्गान्तर में शामिल होगा।
- ➢ कभी-कभी वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा को ही अपवर्जित कर दिया जाता है, जिसे निम्न प्रकार लिखा जाता है:
- ➢ "0 से अधिक परन्तु 20 से अधिक नहीं" ([0.1-20])
- ➢ "20 से अधिक परन्तु 40 से अधिक नहीं" ([20.1-40])

समावेशी विधि [Inclusive Method]

- ➢ इस विधि में एक वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा और दूसरे वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा में 1 का अन्तर होता है।
- ➢ वे आँकड़े/तथ्य जो पूर्णांक मान रखते हैं, उनके लिए इस विधि का प्रयोग आसानी से किया जा सकता है। जैसे:

(0-19)		0-20
(20-39)	या	21-40
(40-59)		41-60

- ➢ लेकिन कई बार वे आँकड़े/तथ्य जो पूर्णांक के रूप में नहीं होते हैं, तो इस विधि में कठिनाई होती है, इसलिए समावेशी श्रेणी को अपवर्जी श्रेणी में बदला जाता है।

- इस प्रक्रिया के दौरान पहले वर्ग-अन्तराल की उच्च सीमा और अगले वर्ग-अन्तराल की निम्न सीमा के अन्तर को 2 बराबर भागों में बाँटकर आधा भाग पहले वर्ग-अन्तराल की उच्च सीमा में जोड़ते हैं और आधा भाग अगले वर्ग-अन्तराल की निम्न सीमा में से घटाते हैं।
- जैसे: (0-20, 21-40) इन वर्गान्तरों को बदलने से इनका मान (0) से (20.5), और (20.5) से (40.5) इस प्रकार हो जाता है।

खुले सिरे वाले वर्ग –

- कभी-कभी किसी दिए गए वर्ग-अन्तराल में प्रथम वर्ग की निम्न सीमा के स्थान पर 'से कम' एवं अन्तिम वर्ग-अन्तराल की उच्च सीमा के स्थान पर 'से अधिक' लिख दिया जाता है ऐसे वर्ग-अन्तरालों को खुले सिरे वाले या विवृत्त मुखी वर्ग-अन्तराल कहा जाता है।
- जैसे:- 20 से कम (इसमें निम्न सीमा की जगह 'से कम' है।

  20-40

  40-60

  60-80
- 80 से अधिक (इसमें उच्च सीमा की जगह 'से अधिक' है।)

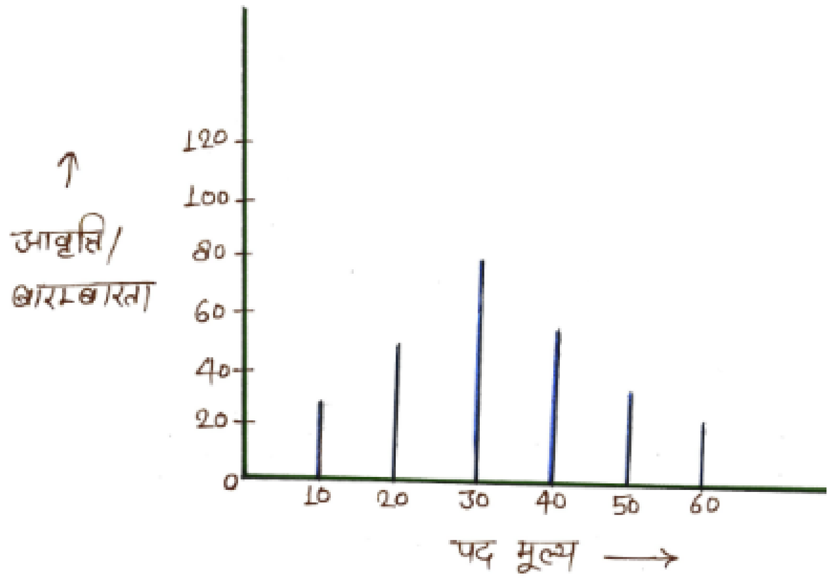
साधारण आवृत्ति व संचयी आवृत्ति/बारम्बारता –

- सामान्यतया अलग-अलग वर्ग-अन्तराल के सामने उनकी आवृत्ति / बारम्बारता लिखी जाती है तो इसे साधारण आवृत्ति बारम्बारता कहते हैं, लेकिन कई बार आवृतियों/बारम्बारताओं को वर्ग-अन्तराल के अनुसार अलग-अलग न लिखकर आवृत्तियों के योग के रूप में लिखा जाता है तो इसे संचयी बारम्बारता/आवृत्ति कहा जाता है।
- इस स्थिति में प्रत्येक वर्ग-अन्तराल की दोनों सीमाएँ न लिखकर केवल एक ही सीमा लिखी जाती है।
- जब संचयी आवृत्ति/बारम्बारता उच्च सीमा के आधार पर लिखी जाए तो इसे 'से कम' संचयी बारम्बारता कहा जाता है तथा जब संचयी बारम्बारता, वर्ग-अन्तराल की निम्न सीमा के आधार पर लिखी जाए तो इसे 'से अधिक' संचयी बारम्बारता कहा जाता है।

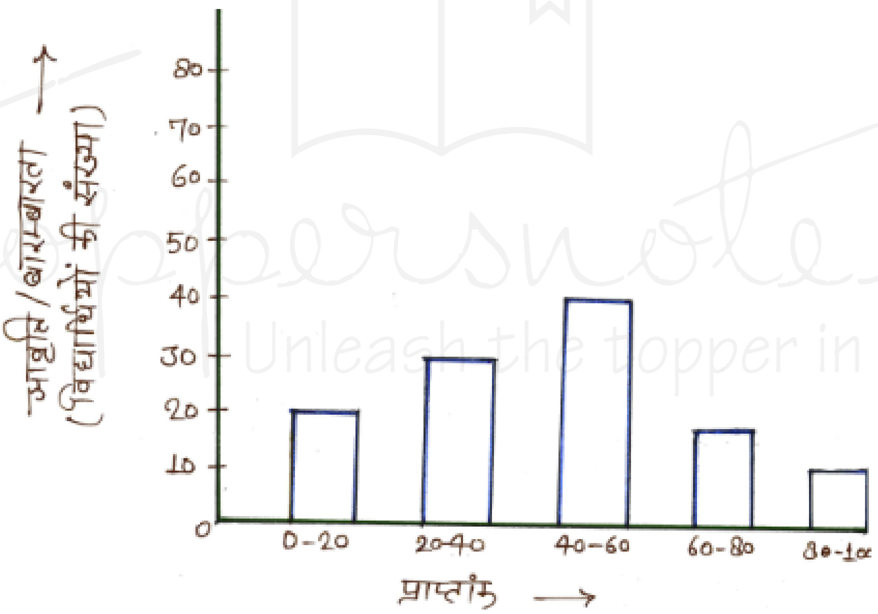
साधारण आवृत्ति/बारम्बारता		**संचयी आवृत्ति/बारम्बारता**			
वर्ग अन्तराल	**आवृत्ति**	**वर्ग अन्तराल**	**'से कम' संचयी आवृत्ति**	**वर्ग अन्तराल**	**'से अधिक' संचयी आवृत्ति**
0 - 20	5	20 से कम	5	0 से अधिक	35
20 - 40	7	40 से कम	12	20 से अधिक	30
40 - 60	11	60 से कम	23	40 से अधिक	23
60 - 80	8	80 से कम	31	60 से अधिक	12
80 - 100	4	100 से कम	35	80 से अधिक	4

आवृत्ति वितरण का ग्राफीय प्रदर्शन/निरूपण -

1. आवृत्ति रेखाचित्र –



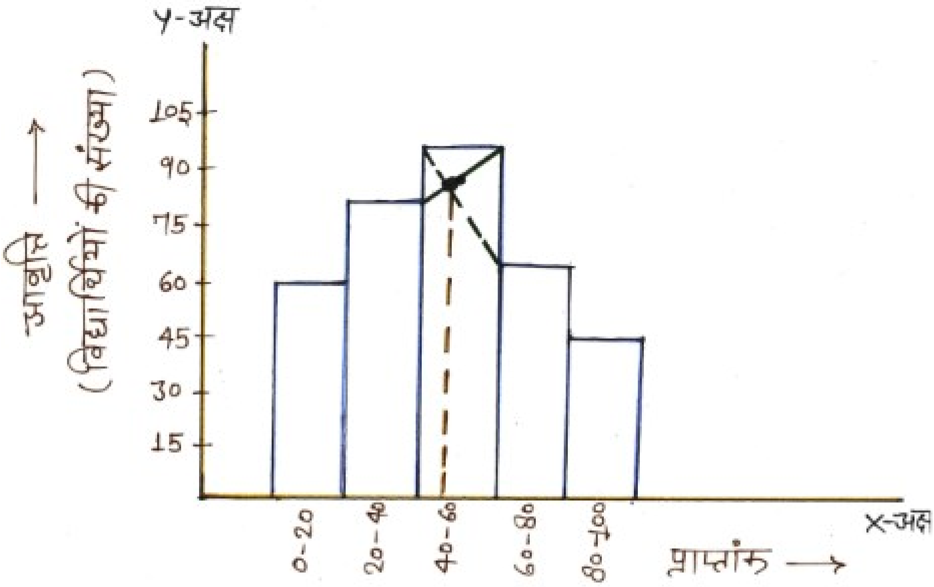
2. **आवृत्ति आयत चित्र [हिस्टोग्राम/Mistogram]**



आवृत्ति आयत चित्र से बहुलक की गणना करना :-

- आवृत्ति आयत चित्र में आयत एक-दूसरे से सटे हुए होते हैं। यदि वर्ग अन्तराल समावेशी हो तो पहले उसे अपवर्जी में बदलना चाहिए।
- अखण्डित श्रेणी में बिन्दू रेखा विधि द्वारा, आवृत्ति आयत चित्र से बहुलक का निर्धारण निम्न प्रकार से किया जाता है :
- सर्वाधिक ऊँचाई वाला आयत, बहुलक वर्ग का आयत माना जाता है। इस सर्वाधिक ऊँचाई वाले आयत के दाहिने कोने को इससे पहले वाले आयत के ऊपरी दाहिने कोने से मिलाते हैं तथा सर्वाधिक ऊँचाई वाले आयत के बाँये कोने को, इस आयत के आगे वाले आयत के बाँये कोने से मिलाते हैं। जहाँ ये दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं, उस कटान बिन्दू से x-अक्ष या x-भुजा पर लम्बवत् रेखा खींची जाती है।

➢ यह लम्बवत् रेखा X-अक्ष को जहाँ पर मिलती है, वही बहुलक का मान होता है।

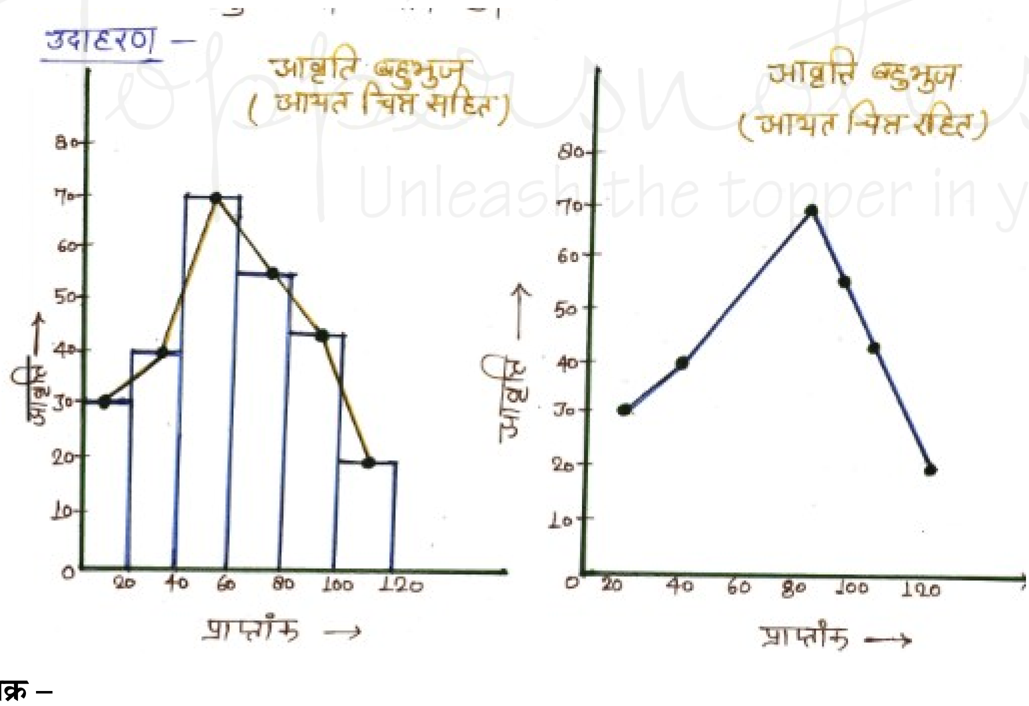


3. **आवृत्ति बहुभुज [Frequency Polygon] -**

➢ इसे वर्ग अन्तरालों के मध्य बिन्दुओं एवं संबंधित आवृतियों/बारम्बारताओं के अनुपात से बनाया जाता है। यह एक, अनेक भुजाओं का ज्यामितीय वक्र होता है। जिसे आवृत्ति आयत चित्र के द्वारा भी बनाया जा सकता है तथा बिना आवृत्ति आयत चित्र के भी बनाया जा सकता है।

➢ दो प्रकार के आँकड़ों/तथ्यों की तुलना करने के लिए भी दो आवृत्ति बहुभुज एक साथ बनाए जा सकते हैं।

➢ आवृत्ति बहुभुज का प्रयोग खण्डित व अखण्डित आवृत्ति वितरण को दर्शाने हेतु किया जाता है।

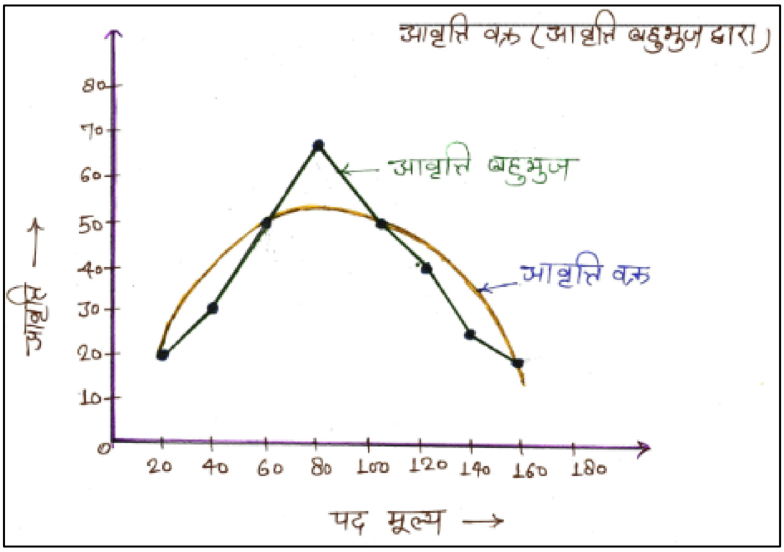


4. **आवृत्ति वक्र –**

➢ आवृत्ति बहुभुज को मुक्त हाथ से सरलित करके आवृत्ति वक्र बनाया जाता है, इसलिए आवृत्ति वक्र को ही सरलीकृत आवृत्ति बहुभुज भी कहा जाता है।

➢ इसमें आवृत्ति बहुभुज में बनने वाली कोणीयता (कोनों) को दूर करने हेतु विभिन्न बिन्दुओं को सीधी रेखा के रूप में न मिलाकर मुक्त हाथ से मिलाया जाता है, परन्तु ऐसा करते समय ध्यान दे कि आवृत्ति वक्र का क्षेत्रफल, आवृत्ति बहुभुज के बराबर ही रहना चाहिए।

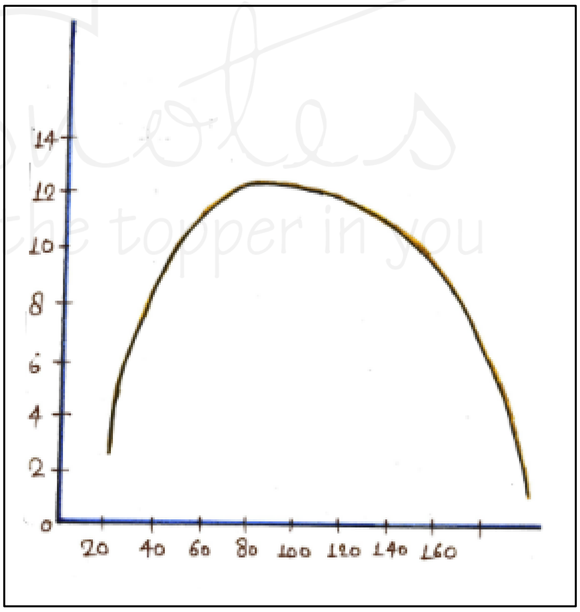
- आवृत्ति बहुभुज को 2 विधियों से सरलीकृत किया जाता है:
  - ✓ ज्यामितीय विधि -
    - इस विधि में आवृत्ति बहुभुज के बिन्दुओं को स्वतंत्र रूप से मिलाते हुए आवृत्ति वक्र बनाया जाता है, इसे मुक्त हाथ विधि भी कहा जाता है।



  - ✓ गणितीय विधि –
    - इस विधि में मुख्य आवृत्तियों को सरलीकृत आवृत्तियों में बदला जाता है।
    - सरलीकृत आवृत्ति बनाने हेतु प्रत्येक वर्ग-अन्तराल की आवृत्ति में उसके आगे व पीछे के वर्गों की आवृतियाँ जोड़कर औसत प्राप्त किया जाता है, जिसे सरलीकृत आवृत्ति कहा जाता है।
    - प्रथम व अन्तिम वर्ग के ऊपर व नीचे के क्रम की आवृत्ति नहीं होती है अतः इन्हें शून्य मानकर औसत ज्ञात किया जाता है।
    - इन्हीं सरल की गई आवृत्तियों को ग्राफ पेपर पर मिलाने से आवृत्ति वक्र प्राप्त होता है।

गणितीय विधि या सरलीकृत आवृतियों द्वारा आवृत्ति वक्र –

वर्गान्तर	आवृत्ति	सरलीकृत आवृत्ति
0-20	6	$\frac{0+6+8}{3} = 46$
20-40	8	$\frac{6+8+12}{2} = 8.6$
40-60	12	$\frac{8+12+4}{3} = 8$
60-80	4	$\frac{12+4+6}{3} = 7.3$
80-100	6	$\frac{4+6+7}{3} = 3.6$
100-120	7	$\frac{6+7+0}{3} = 6.6$
120-140	7	$\frac{7+7+0}{3} = 4.6$



आवृत्ति वक्रों के प्रकार [Types of Frequency Curve] -

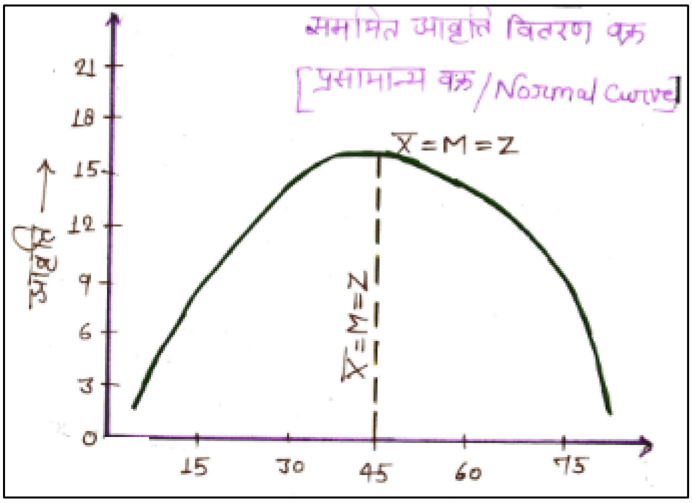
1. समित आवृत्ति वितरण वक्र –

- जब किसी सांख्यिकी श्रेणी में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम में बढ़ती हैं एवं उच्चतम मान तक पहुँचकर उसी निश्चित क्रम से घटती हैं तो ऐसे आवृत्ति वितरण को समित आवृत्ति वितरण तथा इस वितरण से जो आरेख बनता है, उसे समित आवृत्ति वितरण वक्र या प्रसामान्य वक्र कहा जाता है।

ToppersNotes Unleash the topper in you

➢ ऐसे आवृत्ति वितरण वक्र में विषमता नहीं पाई जाती है। आवृत्ति वक्र के उच्चतम शीर्ष बिन्दू से X-अक्ष पर/क्षैतिज अक्ष पर लंब डाला जाए तो वक्र दो बराबर भागों में विभाजित होता है तथा यह लंब, X-अक्ष को जिस बिन्दू पर काटता है, वही मान, समान्तर माध्य, माध्यिका व बहुलक का मान होता है। अर्थात् ये तीनों मान सममित आवृत्ति वितरण में बराबर होते हैं।

वर्गान्तर	आवृत्ति
0-15	4
15-30	11
30-45	19
45-60	10
60-75	3



2. असममित आवृत्ति वितरण वक्र –

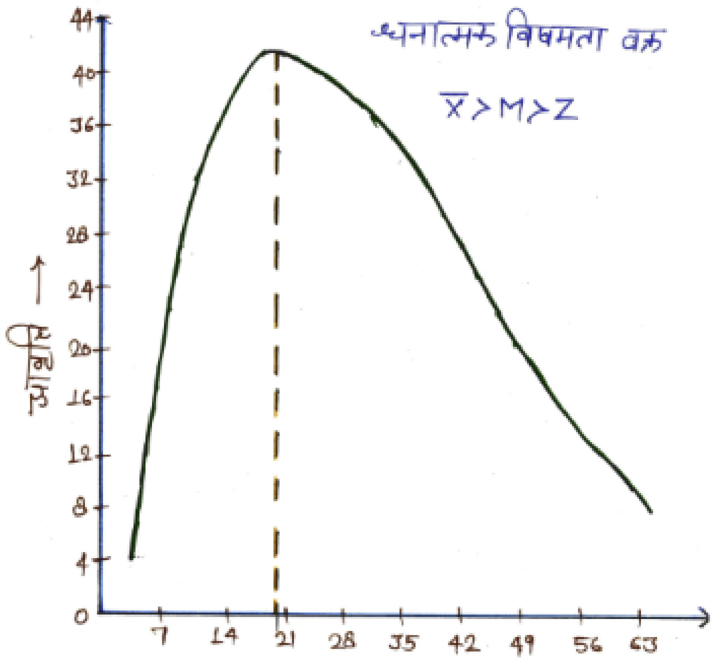
➢ जब किसी आवृत्ति वितरण में आवृतियों के बढ़ने या घटने का क्रम समान नहीं होता है तो इसे असममित आवृत्ति वितरण कहा जाता है तथा इससे जो वक्र बनता है, वह असममित आवृत्ति वितरण वक्र कहलाता है।

➢ ये दो प्रकार के होते हैं –

✓ धनात्मक विषमता वक्र

- यदि आवृत्ति वितरण में प्रारंभ में आधे से कम पदों की आवृत्तियाँ अधिक अन्तर से बढ़ते हुए उच्चतम स्तर पर पहुँचती हैं तथा उसके बाद उच्चतम बिन्दू से कम अन्तर से घटती हुई प्रतीत होती हैं तो ऐसा वितरण, धनात्मक विषमता आवृत्ति वितरण कहलाता है।
- धनात्मक विषमता आवृत्ति वितरण वक्र में शीर्ष/उच्चतम बिन्दू से क्षैतिज/X-अक्ष पर लंब डालने से वक्र का दाहिना भाग बड़ा प्रतीत होता है, तो ऐसे आवृत्ति वितरण में समान्तर माध्य का मान, बहुलक से ज्यादा होता है।

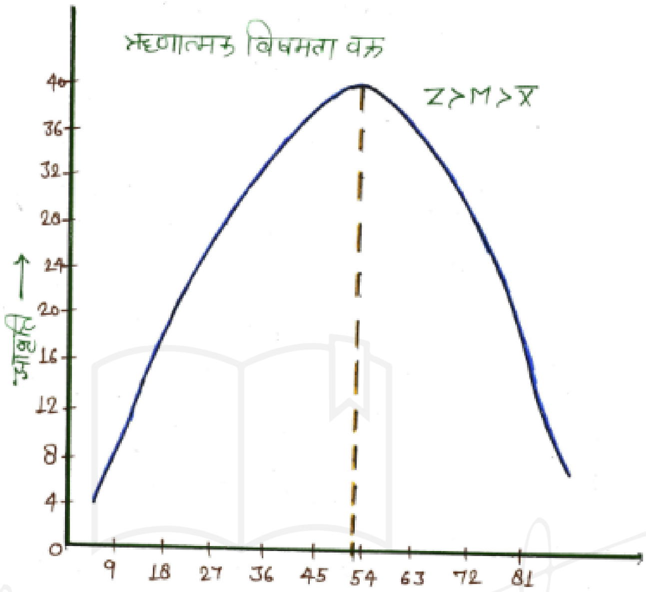
वर्गान्तर	आवृत्ति
0-7	4
7-14	28
14-21	42
21-28	37
28-35	27
35-42	24
42-49	19
49-56	14
56-63	8



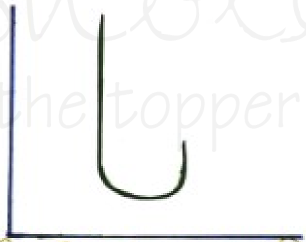
✓ ऋणात्मक विषमता वितरण वक्र –

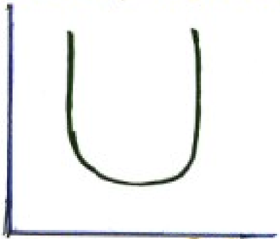
- यदि किसी आवृत्ति वितरण में प्रारंभ में आधे से ज्यादा पदों की आवृतियाँ कम अन्तर से बढ़ती हुई उच्चतम बिन्दू पर पहुँचती हैं तथा उच्चतम बिन्दू के पश्चात् तीव्र अन्तर से कम होती हुई प्रतीत होती हैं तो इसे ऋणात्मक विषमता आवृत्ति वितरण तथा इससे बनने वाले वक्र को ऋणात्मक विषमता वक्र कहा जाता है।
- उस वक्र के उच्चतम/शीर्ष बिन्दू से क्षैतिज अक्ष/X-अक्ष पर लंब डालने से वक्र का बाँया भाग बड़ा प्रतीत होता है, ऐसे आवृत्ति वितरण वक्र में बहुलक का मान, समान्तर माध्य से अधिक होता है।

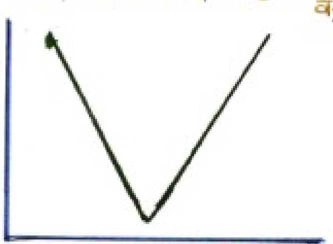
वर्ग अन्तर	आवृत्ति
0 – 9	7
9 – 18	11
18 - 27	15
27 - 36	21
36 - 45	27
45 - 54	39
54 - 63	19
63 - 72	9
72 - 81	4

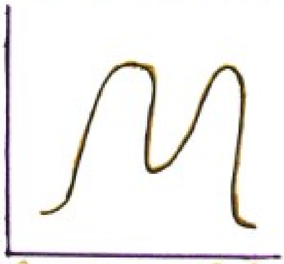



'J' आकार आवृत्ति वितरण वक्र


विपरीत 'J' आकार आवृत्ति वितरण वक्र


'U' आकार आवृत्ति वितरण वक्र


'V' आकार आवृत्ति वितरण वक्र


द्वी बहुलक आवृत्ति वितरण वक्र

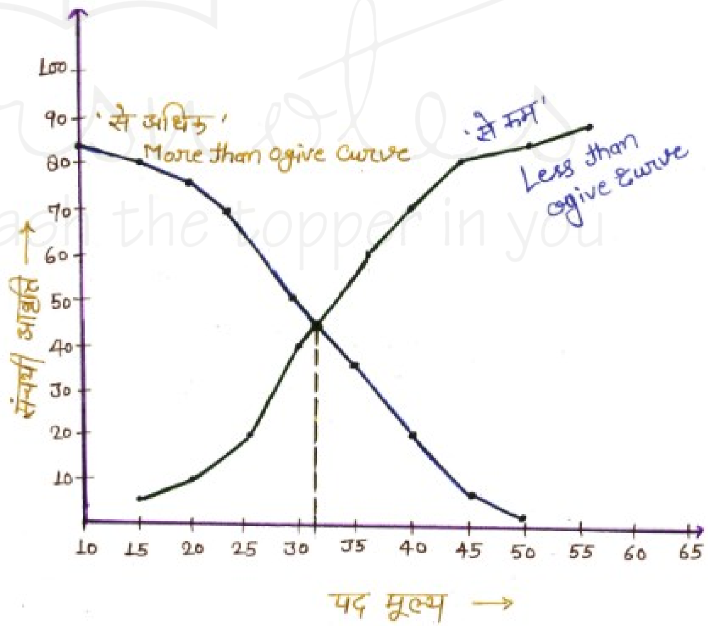

बहु-चोटी आवृत्ति वितरण वक्र

Toppersnotes
Unleash the topper in you

5. संचयी आवृत्ति वक्र [ओजाइव वक्र]

- दी हुई आवृतियों को क्रमानुसार संचयित कर वक्र बनाया जाता है।
- इस वक्र के 2 रूप होते हैं –
  - ✓ ऊपरी सीमा ओजाइव वक्र -
    - यह आवृत्ति वक्र "से कम" संचयी आवृत्ति वक्र कहलाता है, इसमें आवृतियों के बढ़ने की प्रवृत्ति पाई जाती है।
    - यह वक्र हमेशा बाँये नीचले कोने से दाहिने ऊपरी कोने की ओर बढ़ता जाता है।
    - इस वक्र में वर्ग-अन्तराल की उच्च सीमाओं को x-अक्ष पर एवं बढ़ती हुई संचयी आवृतियों/बारम्बारताओं को y-अक्ष पर रखा जाता है।
  - ✓ निचली सीमा ओजाइव वक्र -
    - यह आवृत्ति वक्र "से अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र भी कहलाती है। इस वक्र में वर्ग-अन्तराल की निचली सीमा को x-अक्ष पर एवं घटती हुई आवृतियों/बारम्बारताओं को y-अक्ष पर रखा जाता है।
    - यह वक्र ऊपरी बाँये कोने से नीचले दाहिने कोने की ओर घटती हुई संचयी आवृतियों/बारम्बारताओं के साथ बनाया जाता है।
    - संचयी आवृत्ति वक्र में माध्यिका एवं विभाजक मूल्यों का निर्धारण किया जाता है।

वर्गान्तर	आवृत्ति	'से कम' संचयी आवृत्ति	'से अधिक' संचयी आवृत्ति
10-15	4	4	84
15-20	5	9	80
20-25	10	19	75
25-30	17	36	65
30-35	18	54	48
35-40	14	68	30
40-45	12	80	16
45-50	1	81	4
50-55	3	84	3



'से कम' तथा 'से अधिक' संचयी आवृत्ति वक्र जहाँ एक-दूसरे को मिलते हैं या काटते हैं, वहाँ से क्षैतिज अक्ष/x-अक्ष पर खींचा गया लंब, जिस बिन्दू पर x-अक्ष को काटता है, वह मूल्य, माध्यिका होगा।

माध्यिका मूल्य तथा अन्य विभाजक मूल्यों का निर्धारण गाल्टन ग्राफ विधि द्वारा भी किया जाता है।

6. **व्यावसायिक चित्र :**

(A) गेन्ट चित्र :-

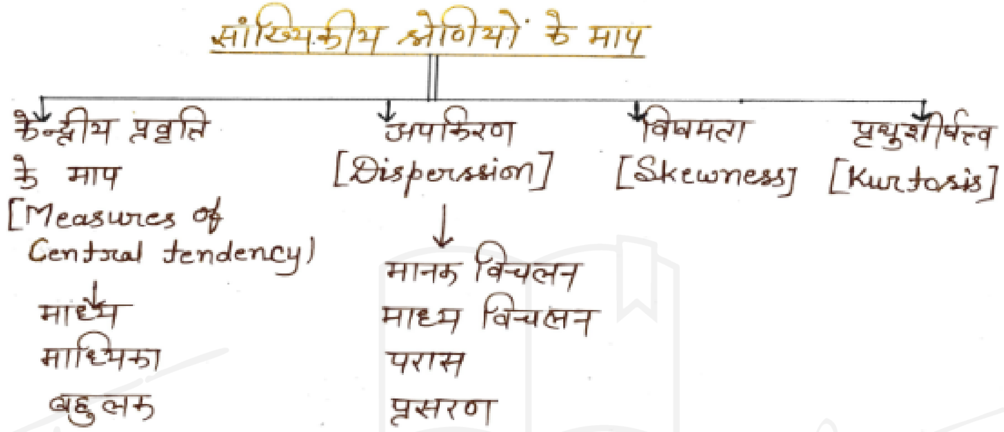
- ✓ प्रतिपादन वर्ष 1917 में हैनरी गेन्ट द्वारा इसे प्रगति चित्र भी कहते है
- ✓ किसी कारखाने के विभिन्न विभागों में दिन-प्रतिदिन उत्पादन के पूर्व निर्धारित लक्ष्यों और उनको प्राप्त करने में की गई प्रगति की तुलना करने के लिए गैन्ट चित्र का प्रयोग किया जाता है।

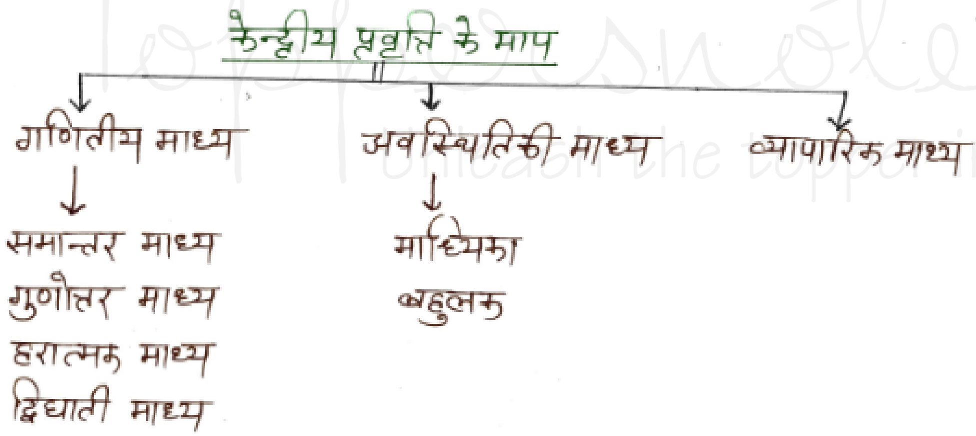
(B) समविच्छेद चित्र

(C) छाया-चित्र

(D) जी चार्ट चित्र

सांख्यिकीय श्रेणियों के माप





समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

- ➢ समान्तर माध्य, किसी सांख्यिकीय श्रेणी का सारांश मूल्य या औसत मूल्य या प्रतिनिधि मूल्य होता है। समान्तर माध्य को सभी पदों का योग कर, उसमें पदों की संख्या का भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

समान्तर माध्य दो प्रकार का होता है:

1. **सरल समान्तर माध्य (Simple Arithmetic Mean):**

- ➢ इस माध्य में श्रेणी के सभी पदों का समान महत्त्व होता है। सभी पदों का योग कर, पदों की संख्या का भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

2. **भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean):**

➢ इस माध्य में प्रत्येक पद को उसके महत्त्व के आधार पर भारित संख्या से गुणा करके, इन पदों के योग में पदों के भार का भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधियाँ:

1. **प्रत्यक्ष विधि (Direct Method):**

➢ यह समान्तर माध्य ज्ञात करने की सबसे सरल विधि है। इस विधि में व्यक्तिगत श्रेणी के सभी पदों के योग में पदों की संख्या का भाग देकर माध्य ज्ञात किया जाता है। यह विधि खण्डित और अखण्डित श्रेणियों में उपयोगी है, यदि संख्याएँ दशमलव में हो तो यह कम उपयोगी हो सकती है।

2. **लघु विधि (Assumed Mean Method):**

➢ इस विधि में सभी दिए गए मूल्यों में से मध्य के पद मूल्य को कल्पित माध्य या अनुमानित माध्य मान लेते हैं। बाद में प्रत्येक पद मूल्य में से ज्ञात कल्पित माध्य को घटाकर विचलन ज्ञात करते हैं, जो या तो धनात्मक या ऋणात्मक प्राप्त होते हैं। बाद में प्राप्त विचलन को आवृत्तियों से गुणा कर योगफल ज्ञात किया जाता है। इस योगफल में पदों की संख्या का भाग देकर प्राप्त मान में कल्पित माध्य को जोड़ दिया जाता है।

3. **पद विचलन विधि (Deviation Method):**

➢ इस विधि में लघु विधि से प्राप्त विचलन में वर्गान्तर का भाग दिया जाता है और अंत में सूत्र में वापस वर्गान्तर से गुणा किया जाता है। यह विधि अखण्डित श्रेणी में काम में ली जाती है।

<u>विभिन्न प्रकार की श्रेणियों में समान्तर माध्य की गणना:</u>

व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना:

प्रत्यक्ष विधि: $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$

जहाँ:

➢ $\bar{x}$ = समान्तर माध्य

➢ Σx = सभी पदों का योग

➢ (N) = पदों की संख्या

लघु विधि: $\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$

जहाँ:

➢ (A) = कल्पित माध्य

➢ (dx = x-A) = विचलन = पद का मूल्य - कल्पित माध्य

उदाहरण: (1) व्यक्तिगत श्रेणी (5, 9, 13, 17, 21) का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रत्यक्ष विधि: $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{5+9+13+17+21}{5} = \frac{65}{5} = 13$

लघु विधि: $\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$

माना कल्पित माध्य (A = 13)

मूल्य (x)	विचलन (dx = x-A)
5	5-13 = -8
9	9-13 = -4
13	13-13 = 0
17	17-13 = 4
21	31-13 = 8
	$\Sigma dx = 0$

$\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{N} = 13 + \frac{0}{5}$

उदाहरण: (2) एक 6 पदों वाली सांख्यिकीय श्रेणी के पदों का योग 66 है, तो समान्तर माध्य क्या होगा?

हल:

समान्तर माध्य $\bar{x} = \frac{\text{पदों का योग } (\Sigma d)}{\text{पदों की संख्या } (N)}$

यहाँ $\sum x = 66 \;\; n = 6$

$\bar{x} = \frac{66}{6} = \bar{x} = 11$

समान्तर माध्य के उदाहरण (Examples of Arithmetic Mean)

उदाहरण (3): यदि 7 पदों वाली सांख्यिकीय श्रेणी का समान्तर माध्य 13 है, तो पदों का योग क्या होगा?

हल: $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$

$13 = \frac{\sum x}{7}$

अत: $\sum x = 13 \times 7 = 91$

पदों का योग:

$\sum x = 91$

उदाहरण (4): एक सांख्यिकीय श्रेणी के पदों का योग 72 है और समान्तर माध्य 8 है, तो पदों की संख्या कितनी होगी?

हल: $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$

$8 = \frac{72}{N}$

अत: पदों की संख्या: $N = \frac{72}{8} = 9$

[N = 9]

उदाहरण (5): छः पदों वाली सांख्यिकीय श्रेणी में (5, 11, 17, 23, 29) पद हैं, और समान्तर माध्य 22 है, तो छठे पद का मान क्या होगा?

हल:

$\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$

$22 = \frac{\sum x}{6}$

Toppersnotes
Unleash the topper in you

छः पदों का कुल योग: = $\sum x = 22 \times 6 = 132$

दिए गए पाँच पदों का योग: = $5 + 11 + 17 + 23 + 29 = 85$

छठे पद का मान: = छठे पद का योग – पाँच पद का योग

$132 - 85 = 47$

छठे पद का मान: = 47

उदाहरण (6): यदि सांख्यिकीय श्रेणी के सभी पदों में 2 जोड़ दिए जाएं तो समान्तर माध्य पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल:

समान्तर माध्य भी 2 बढ़ जाएगा: अर्थात $\bar{x} + 2$

उदाहरण:

यदि मूल संख्याएँ (3, 4, 5, 8, 10) हैं:

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 + 5 + 8 + 10}{5}$$

$$= \frac{35}{5} = 6$$

$$\bar{x} = 6$$

2-2 जोड़ने पर:

संख्याएँ: (5, 6, 7, 10, 12) अतः

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 10 + 12}{5}$$

$$= \frac{40}{5} = 8$$

$$\bar{x} = 8$$

निष्कर्ष:

किसी सांख्यिकीय श्रेणी के प्रत्येक पद में कोई समान संख्या जोड़ने, घटाने, गुणा या भाग करने से समान्तर माध्य उसी अनुपात में परिवर्तित हो जाता है।

उदाहरण (7): (n) प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात करें।

हल:

$$\bar{x} = \frac{\text{प्राकृत संख्याओं का योग}}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \times n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{n+1}{2}$$

$$\left[\because n \text{ प्राकृत संख्याओं का योग} = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$