



संख्यात्मक योग्यता

सभी प्रतियोगी परीक्षाओं के लिए



विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
1	संख्या पद्धति	1
2	सरलीकरण	8
3	लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक	12
4	करणी व घातांक	15
5	प्रतिशतता	19
6	लाभ – हानि	23
7	बट्टा	28
8	अनुपात व समानुपात	31
9	मिश्रण एवं एलीगेशन	35
10	औसत	37
11	समय और कार्य	41
12	चाल, समय और दूरी	44
13	नाव और धारा	48
14	पाइप और टंकी	50
15	साझेदारी	53
16	साधारण ब्याज	56
17	चक्रवृद्धि ब्याज	59
18	बीजगणित	62
19	ज्यामिति	67
20	क्षेत्रमिति	84
21	त्रिकोणमिति	99
22	डेटा इंटरप्रिटेशन	106

1

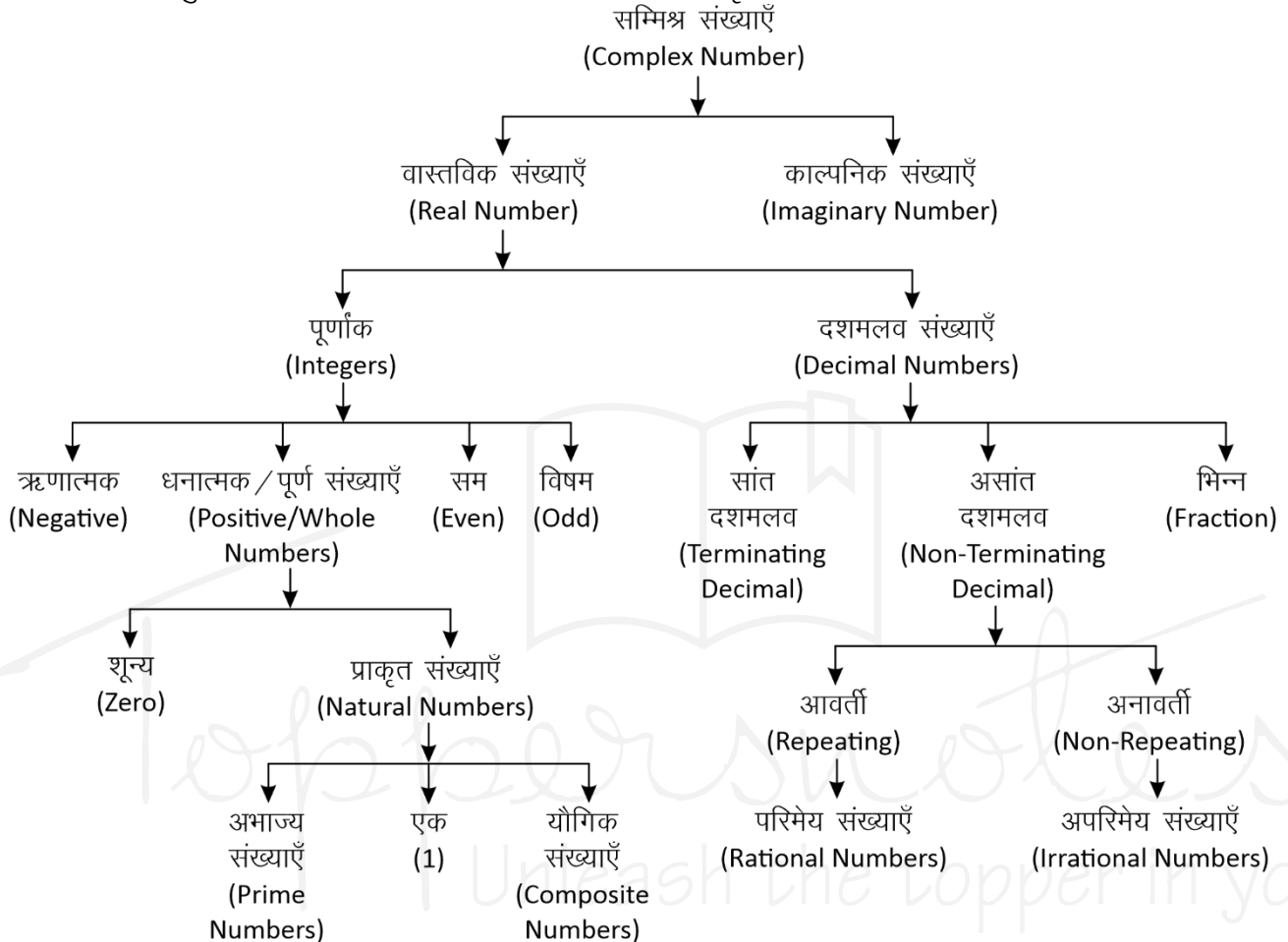
CHAPTER

संख्या पद्धति (Number System)



संख्या पद्धति :- किसी भी यौगिक राशि के परिणामों का बोध कराने के लिए जिस पद्धति का उपयोग होता है, संख्या पद्धति कहलाती है।

संख्याओं को उनके गुणों और विशेषताओं के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है –



सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number)

वे सभी संख्याएँ जो वास्तविक और काल्पनिक संख्याओं से मिलकर बनी होती हैं।

इन्हें $(a + ib)$ के रूप में लिखा जाता है। जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $i = \sqrt{-1}$ है।

$$Z = a \text{ (वास्तविक संख्या)} + ib \text{ (काल्पनिक संख्या)}$$

- वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers):** परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।
- पूर्णक संख्याएँ :** संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे I से सूचित करते हैं।
 $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

- धनात्मक/पूर्ण संख्याएँ :** जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

नोट : चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

- प्राकृत संख्याएँ :** जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं।

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग =

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है।

उदाहरण –

$$11^2 = 121$$

$$12^2 = 144$$

$$11 + 12 \rightarrow 23 \quad \text{Difference } 144 - 121 = 23$$

(a) अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) :- एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह संख्या स्वयं, उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,.....}

- तीन अंको की सबसे छोटी अभाज्य संख्या = 101
- तीन अंको की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या = 997
जहाँ 1 Prime Number नहीं है।
2 एकमात्र सम Prime संख्या है।
3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।
1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9
25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6
1-50 तक कुल 15 Prime Number है।
51-100 तक कुल 10 Prime Number है।
अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।
1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46
1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62
1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78
1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

☞ **अभाज्य संख्याओं का परीक्षण :-** दी गयी संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। माना यह संख्या x है, अब x से छोटी समस्त अभाज्य संख्याओं की सहायता से दी गयी संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए।

- यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक अभाज्य संख्या होगी।

उदाहरण –

क्या 349 एक अभाज्य संख्या है या नहीं ?

हल –

349 का संभावित वर्गमूल 19 होगा और 19 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 है। स्पष्ट है कि 349 इन सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्य नहीं है अतः 349 भी एक अभाज्य संख्या है।

सह अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)

$$\text{HCF} = 1$$

(b) यौगिक संख्याएँ (Composite Numbers) :- वे प्राकृत संख्याएँ जो 1 या स्वयं को छोड़कर किसी अन्य संख्या से भी विभाज्य हो, यौगिक संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे – 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

(ii) सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती हैं।

$$n \text{ वां पद} = 2n$$

$$\text{प्रथम } n \text{ सम संख्याओं का योग} = n(n+1)$$

$$\text{प्रथम } n \text{ सम संख्याओं के वर्गों का योग} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2} \right\}$$

(iii) विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं।

$$\text{प्रथम } n \text{ विषम संख्याओं का योग} = n^2$$

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2} \right\}$$

II. दशमलव

दशमलव वे संख्याएँ हैं जो दो पूर्ण संख्याओं या पूर्णांकों के बीच आती हैं। जैसे – 3.5 एक दशमलव संख्या है जो 3 व 4 के बीच स्थित है।

- प्रत्येक दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक भिन्न को भी दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

(i) सांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है।

(ii) असांत दशमलव

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक।

$$\text{जैसे} - 0.3333, 0.7777, 0.183183183, \dots$$

ये दो प्रकार के हो सकते हैं –

A. आवर्ती दशमलव भिन्न (Repeating)

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

$$\text{जैसे} - \frac{1}{3} = 0.333, \dots, \frac{22}{7} = 3.14285714, \dots$$

- ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं।

0.333..... = $0.\overline{3}$ — इसे बार बोलते हैं।
 $\frac{22}{7} = 3.14285714.... = 3.142857$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले —

$$0.\overline{P} = \frac{P}{9} \quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99} \quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले —

$$0.p\overline{q} = \frac{pq - p}{90} \quad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$$

$$0.\overline{pqr} = \frac{pqr - p}{990} \quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs - pq}{9900}$$

उदाहरण —

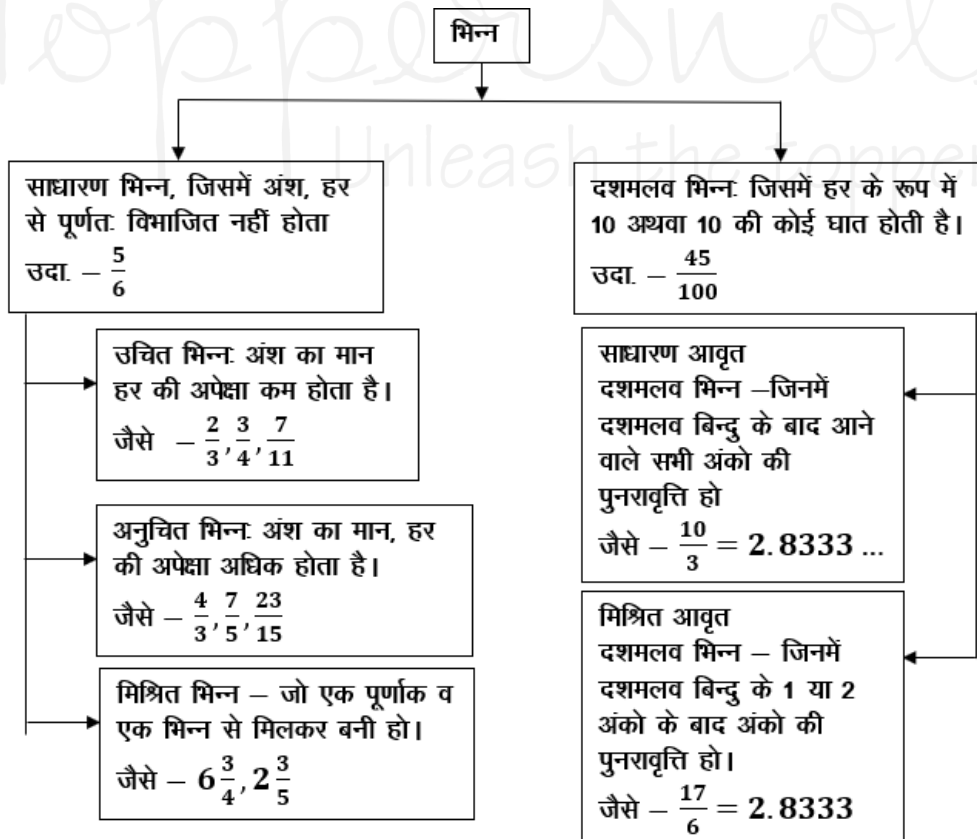
(i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.\overline{625} = \frac{625 - 6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.\overline{3524} = \frac{3524 - 35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

- परिमेय (Rational) संख्याएँ — वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

भिन्नों के प्रकार



उदाहरण —

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$$

B. अनावर्ती (Non-Repeating)

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती।

जैसे — $\pi = 3.1415926535897932...$

$\sqrt{2} = 1.41421356237...$

- अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ — इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण —

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26}.....$

भिन्न (Fraction) :- भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण चीज का कोई भाग निरूपित करती है।

जैसे एक सेब के चार भाग किये जाते हैं, उसमें से एक हिस्सा निकाल दिया गया तो उसे $\frac{1}{4}$ के रूप में प्रदर्शित

किया जाता है। जबकि शेष बचे भाग को $\frac{3}{4}$ के रूप में प्रदर्शित किया जायेगा।

भिन्न दो भागों में बंटा होता है — अंश व हर

माना कोई भिन्न = $\frac{p}{q}$ → अंश
 q → हर

2. काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary Numbers): जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

परफेक्ट संख्या (Perfect Number)

वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण —

$6 \rightarrow 1, 2, 3 \rightarrow$ यहाँ $1 + 2 + 3 \rightarrow 6$

$$28 \rightarrow 1, 2, 4, 7, 14 \rightarrow 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \rightarrow 28$$

पूर्णवर्ग संख्या की पहचान



इकाई अंक जो एक पूर्ण वर्ग संख्या के हो सकते हैं।

- 0 2 —
- 1 3 —
- 4 7 —
- 5 or 25 8 —
- 6
- 9
- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

नोट – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

1. Decimal संख्या को Binary में बदलना :

किसी डेसीमल (दस-आधारी) संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त डेसीमल (दस-आधारी) संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते हैं जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।

अब सभी शेषफल को उल्टे क्रम में लिखा जाए तो परिवर्तित बाइनरी संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण —

$2 \times 44 = 88 ; 89 - 88 = 1$	89
$2 \times 22 = 44 ; 44 - 44 = 0$	44
$2 \times 11 = 22 ; 22 - 22 = 0$	22
$2 \times 5 = 10 ; 11 - 10 = 1$	11
$2 \times 2 = 4 ; 5 - 4 = 1$	5
$2 \times 1 = 2 ; 2 - 2 = 0$	2
	1

अतः 89 के समतुल्य **Binary number** = **(1011001)₂**

2. Binary को Decimal में बदलना :

Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाईं ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण —

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

अब

$$\begin{aligned}(1011001)_2 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + \\ &0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} = 89\end{aligned}$$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे **Power** के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (**Power**) घात में एक जोड़कर घातो का गणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण –

2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल -

$$2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$$

$$\begin{aligned}\text{भाजकों की संख्या} &= (3+1)(1+1)(1+1)(1+1) \\ &= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32\end{aligned}$$

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. जब संख्या घात (Power) के रूप में हो

जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा। जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना पेश प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः विभाजित हो जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।

2. सरलीकरण के रूप में हो

प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

- यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो
 n विषम होने पर $(a+b)$ इसका भाजक होगा।
- यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

n विषम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$	रोमन पद्धति के संकेतक				
n सम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$ या $(a+b)$ या दोनों।	1	$\rightarrow$	I	20	$\rightarrow$ XX
(i) $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।	2	$\rightarrow$	II	30	$\rightarrow$ XXX
(ii) $a^n \div (a+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल } a \text{ होगा} \end{array} \right.$	3	$\rightarrow$	III	40	$\rightarrow$ XL
(iii) $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा	4	$\rightarrow$	IV	50	$\rightarrow$ L
(iv) $(a^n + a) \div (a+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा।} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल } (a-1) \text{ होगा।} \end{array} \right.$	5	$\rightarrow$	V	100	$\rightarrow$ C
	6	$\rightarrow$	VI	500	$\rightarrow$ D
	7	$\rightarrow$	VII	1000	$\rightarrow$ M
	8	$\rightarrow$	VIII		
	9	$\rightarrow$	IX		
	10	$\rightarrow$	X		

विभाज्यता के नियम

संख्या	नियम
2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या में अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	यदि दी गयी संख्या के इकाई अंक का दुगुना बाकी संख्या (इकाई का अंक छोड़कर) से घटाने पर प्राप्त संख्या 7 से विभाजित है तो पूरी संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी। अथवा किसी संख्या में अंकों की संख्या 6 के गुणज में हो तो संख्या 7 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 4444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अन्तिम तीन अंक '000' (शून्य) हो। जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी।
10 से	अन्तिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	किसी संख्या में एक ही अंक 6 बार दोहराए या अन्तिम अंक को 4 से गुणा करके शेष संख्या (इकाई अंक छोड़कर) में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे – 222222, 17784

अभ्यास प्रश्न

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 यदि किसी संख्या का $\frac{3}{4}$ उस संख्या के $\frac{1}{6}$ से 7 अधिक है, तो उस संख्या $\frac{5}{3}$ क्या होगा?

- (a) 12 (b) 18
(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b , उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

- (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$
(c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

- (a) 1350 (b) 1250
(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का $\frac{5}{16}$ ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का $\frac{5}{6}$ ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये।

- (a) 300 (b) 480
(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी।

- (a) 47 (b) 48
(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 64329 को जब किसी संख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते हैं तो भाज्य क्या है ?

- (a) 184 (b) 224
(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2 $(3^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28})$ विभाजित है।

- (a) 11 (b) 16
(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है। तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

- (a) 2706
(b) 2796
(c) 2736
(d) 2826

उत्तर (c)

इकाई अंक निकालना आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$ के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

कितना है ?

- (a) 0 (b) 2
(c) 3 (d) 5

प्राकृतिक संख्याओं के square/cube के योग एवं अंतर पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $(11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 20^2) = ?$

- (a) 385 (b) 2485
(c) 2870 (d) 3255

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = ?$

दशमलव संख्या आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016 \times 0.025}{0.325 \times 0.05} \div \frac{0.1216 \times 0.105 \times 0.002}{0.08512 \times 0.625 \times 0.039} + \left(\sqrt[4]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}} \right)^2$$

उसका उत्तर $\frac{19}{10}$ था। उसके उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2 $\frac{0.936 - 0.568}{0.45 + 2.67}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

शून्य की संख्या पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $(1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times \dots \times 98^{98} \times 99^{99} \times 100^{100})$

के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 1200 (b) 1300
(c) 1500 (d) 1600

उदा.2 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 250$ को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करने पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 निम्न में से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

- (a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बड़ी संख्या हैं।

- $(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$
(a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1
(c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

आरोही/अवरोही क्रम आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को बढ़ते क्रम में लिखने पर -

- (a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$
(c) $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ -

$$\sqrt{7} - \sqrt{5}, \sqrt{5} - \sqrt{3}, \sqrt{9} - \sqrt{7}, \sqrt{11} - \sqrt{9}$$

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$ को अवरोही क्रम में लिखिये ?

गुणनखंडों की संख्या पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $\{(127)^{127} + (97)^{127}\}$ तथा $\{(127)^{97} + (97)^{97}\}$ का

अभयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

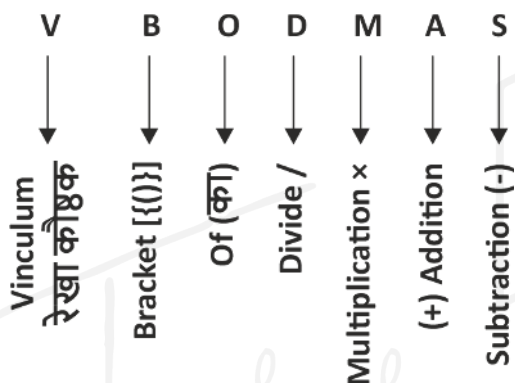
- (a) 127 (b) 97
(c) 30 (d) 224

उदा.2 $\frac{(18)^{15} \times (75)^{16} \times (42)^{14}}{(35)^{12} \times (12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड हैं ?

सरलीकरण (Simplification)



- सरलीकरण के अंतर्गत हम दिए गये आँकड़ों को सरल रूप में प्रदर्शित करते हैं जैसे कि आँकड़े भिन्न में, दशमलव में, बट्टे में, घात में तथा Mathematical Operation को हल करके या रूप बदल के किया जाता है ।
- यदि कुछ संख्या पर भिन्न-भिन्न प्रकार के Operation दिये हो तो हम उसे कैसे हल करे कि प्रश्न का उत्तर सही आये उसके लिये एक Rule होता है जिसे हम VBODMAS का Rule कहते हैं ।
- हम पहले कौनसा Operation करे, यह VBODMAS का Rule तय करता है ।



- इन सभी गणितीय क्रियाओं में सबसे पहले V है जिसका मतलब **Vinculum** (रेखा कोष्ठक) है । यदि प्रश्न में रेखा कोष्ठक है तो सर्वप्रथम उसे हल करेंगे और उसमें फिर (BODMAS) Rule कार्य करेगा
- द्वितीय स्थान पर B (Bracket) मतलब कोष्ठक है जो निम्न हो सकते हैं—
 1. छोटा कोष्ठक ()
 2. मंझला कोष्ठक { }
 3. बड़ा कोष्ठक []
- सबसे पहले छोटा कोष्ठक, फिर मंझला कोष्ठक और उसके बाद बड़ा कोष्ठक हल किया जाता है ।
- तृतीय स्थान पर “O” है जो कि “of” या “Order” से बना है, जिसका मतलब “गुणा” से या “का” से होता है ।
- चतुर्थ स्थान पर “D” है जिसका मतलब “Division” है, दिए गये व्यंजन में भिन्न-भिन्न क्रियाओं में सबसे पहले भाग करते हैं यदि दिया है तो ।
- पंचम स्थान पर “M” है जिसका मतलब “Multiplication” है, दिये गए व्यंजन में “Division” के बाद “Multiplication” (गुणा) करेंगे ।

- छठा स्थान “A” रखता है जो “Addition” (जोड़ा) से संबंधित है । Division-multiplication के बाद Addition किया होती है ।
- सप्तम स्थान पर “S” है जो “Subtraction” से बना है ।

प्रश्न –
सरल कीजिए ।

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{ 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3} \right)$$

हल:

Step 1 – सबसे पहले सभी मिश्र भिन्नों को साधारण भिन्नों में बदलते हैं ।

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3} \right)$$

अब VBODMAS के अनुसार

Step 2 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{3-2}{12} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3} \right)$$

Step 3 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{12} \right) \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 4 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{30-1}{12} \right) \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 5 –

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{29}{12} \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 6 – } \left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{30-29}{24} \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 7 – } \left[\frac{13}{4} \div \frac{1}{24} \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 8 – } \left[\frac{13}{4} \times 24 \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 9 – $13 \times 6 \times \frac{6}{13}$
 $= 36$ Ans.

बीजगणितीय सूत्र

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$
- $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
- $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$
- $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
 $= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$
यदि $a + b + c = 0$ हो तो
 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$
- $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$

समान्तर श्रेणी

वह श्रेणी जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से कोई नियत राशि जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होता है ।

जैसे – 2, 5, 8, 11,

समान्तर श्रेणी का n वाँ पद

$$T_n = a + (n - 1)d$$

जहाँ a = प्रथम पद

d = सार्व अंतर (द्वितीय पद – प्रथम पद)

n = पदों की संख्या

समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

यदि प्रथम व अंतिम पद ज्ञात हो तो $S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$

जहाँ ℓ = अंतिम पद

दो राशियों के मध्य समांतर माध्य $A = \frac{a+b}{2}$ [a, b का

समांतर माध्य A है ।]

गुणोत्तर श्रेणी

यदि श्रेणी के प्रत्येक पद का उससे पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है तो गुणोत्तर श्रेणी होती है । इस निश्चित राशि को सार्वअनुपात कहते हैं ।

गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद

$$T_n = a.r^{n-1}$$

जहाँ a = प्रथम पद

r = सार्व अनुपात

n = पदों की संख्या

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल

$$S_n = a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right); \text{ जब } r < 1 \quad S_n = a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right); \text{ जब } r > 1$$

- दो राशियों के मध्य गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$
- यदि दो धनात्मक राशियों a व b के मध्य समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य A व G है तो

$$A > G, \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

हरात्मक श्रेणी

किसी श्रेणी के पदों के व्युत्क्रम उसी क्रम में लिखने पर समांतर श्रेणी में हो तो उसे हरात्मक श्रेणी कहते हैं ।

हरात्मक श्रेणी का n वाँ पद

$$T_n = \frac{1}{a + (n - 1)d}$$

$$\text{हरात्मक माध्य (H)} = \frac{2ab}{a+b}$$

समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य में संबंध

माना A, G तथा H दो राशियों a व b के मध्य क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य है तब

$$\boxed{G^2 = AH} \quad \text{तथा} \quad \boxed{A > G > H}$$

अभ्यास प्रश्न

VBODMAS – आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$ of $2 \div (15 \div 8 \times 4)$
of $(28 \div 7$ of $5)$ का मान होगा –

- (a) $4\frac{32}{75}$ (b) $4\frac{8}{75}$
(c) $4\frac{2}{3}$ (d) $4\frac{1}{6}$

उदा.2 सरल करें

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{ 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3} \right)$$

उदा.3 सरल करें ।

$$2\frac{3}{4} \div 1\frac{5}{6} \div \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{7} \div \frac{3}{4} \text{ of } \frac{3}{7}$$

- (a) $\frac{56}{77}$ (b) $\frac{49}{80}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{2}{9}$

वर्गान्तर तथा वर्गमूल आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + \sqrt{49}}}}} \text{ is}$$

- (a) 3 (b) 9
(c) 7 (d) 5

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $(102)^2 = 10404$ है, तो

$$\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$$

- का मान किसके बराबर है ?
(a) 0.306 (b) 0.0306
(c) 11.122 (d) 11.322

उत्तर (d)

उदा.3 $33 - 4\sqrt{35}$ का वर्गमूल क्या है ?

- (a) $\pm(2\sqrt{7} + \sqrt{5})$ (b) $\pm(\sqrt{7} + 2\sqrt{5})$
(c) $\pm(\sqrt{7} - 2\sqrt{5})$ (d) $\pm(2\sqrt{7} - \sqrt{5})$

घनान्तर तथा घनमूल आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $(\sqrt{4^3 + 15^2})^3$ का मान क्या है ?

- (a) 4913 (b) 4313
(c) 4193 (d) 3943

उत्तर (a)

उदा.2 710 में कौनसी छोटी संख्या जोड़ी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

- (a) 29 (b) 19
(c) 11 (d) 21

उत्तर (b)

भिन्न आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

- (c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{32}$

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $2 = x + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$ है तो x का मान ज्ञात करें ।

- (a) $\frac{18}{17}$ (b) $\frac{21}{17}$
(c) $\frac{13}{17}$ (d) $\frac{12}{17}$

उत्तर (b)

उदा.3 $999\frac{998}{999} \times 999$ किसके बराबर है ?

- (a) 998999 (b) 999899
(c) 989999 (d) 999989

उत्तर (a)

उदा.4 $\frac{1}{5} + 999 \frac{494}{495} \times 99$ का मान ज्ञात करें ।

- (a) 90000 (b) 99000
(c) 90900 (d) 99990

उत्तर (b)

बीजगणितीय सूत्रों पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ के बराबर है ?

- (a) $2\frac{1}{2}$ (b) $3\frac{1}{2}$
(c) $4\frac{1}{2}$ (d) $5\frac{1}{2}$

उत्तर (c)

उदा.2 $\frac{0.51 \times 0.051 \times 0.051 + 0.041 \times 0.041 \times 0.041}{0.51 \times 0.051 - 0.051 \times 0.041 + 0.041 \times 0.041}$ का मान क्या है ?

- (a) 0.92 (b) 0.092
(c) 0.0092 (d) 0.00092

उत्तर (b)

श्रेणी आधारित (समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी, हरात्मक श्रेणी)



प्रश्नों के हल



उदा.1 50 से कम 3 के सभी गुणजों का योगफल ज्ञात करो?

- (a) 400 (b) 408
(c) 404 (d) 412

उत्तर (b)

उदा.2 निम्नलिखित समांतर श्रेणी में कितने पद हैं ?

7, 13, 19, , 205

उदा.3 5 के उन सभी धनात्मक गुणांकों का योग ज्ञात करें जो 100 से कम है ?

समीकरण आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 एक पर्यटक प्रतिदिन उतने ही रुपये खर्च करता है जितने उसके पर्यटन के दिनों की संख्या है । उसका कुल खर्च रुपये 361 है, तो ज्ञात करें कि उसका पर्यटन कितने दिनों तक चला ?

- (a) 17 days (b) 19 days
(c) 21 days (d) 31 days

उत्तर (b)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गों का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

- (a) 40 (b) 44
(c) 80 (d) 89

उत्तर (a)

उदा.3 जब एक दो अंकों की संख्या को उसके अंकों के योग से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 424 होता है । जब उसके अंकों को आपस में बदलने से प्राप्त संख्या को अंकों के योग से गुणा किया जाता है तो परिणाम 280 होता है । संख्या के अंकों का योग कितना है?

- (a) 7 (b) 9
(c) 6 (d) 8

उत्तर (d)

लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक (LCM & HCF)



गुणनखण्ड

एक संख्या को दूसरे का गुणनखण्ड कहा जाता है, यदि यह दूसरे को पूरी तरह से विभाजित कर दे। इस प्रकार 3 व 4, 12 के गुणनखण्ड हैं।

समापवर्तक

वह संख्या जो दो या दो से अधिक दी हुयी संख्याओं को पूर्णतः विभाजित कर दे, उन संख्याओं का समापवर्तक कहलाती है। इस प्रकार 9, 18, 21 एवं 33 का एक समापवर्तक 3 है।

LCM (Lowest Common Multiple) (लघुत्तम समापवर्त्य)

- वह सबसे छोटी संख्या जो दी गयी संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य हो, LCM कहलाती है।
- Power वाले संख्या का LCM निकालना** — अभाज्य गुणनखण्ड करने के बाद Power के रूप में लिखेंगे और जितने अभाज्य संख्या का प्रयोग होगा उसे गुणा के रूप में लिखेंगे और उस पर अधिकतम Power रखेंगे।

उदा.1 $(12)^{16}, (18)^{15}, (30)^{18}$ का LCM निकालें।

हल $(12)^{16} = (2 \times 2 \times 3)^{16} = (2^2 \times 3)^{16} = 2^{32} \times 3^{16}$

$(18)^{15} = (2 \times 3 \times 3)^{15} = (2 \times 3^2)^{15} = 2^{15} \times 3^{30}$

$(30)^{18} = (2 \times 3 \times 5)^{18} = 2^{18} \times 3^{18} \times 5^{18}$

अतः LCM = $2^{32} \times 3^{30} \times 5^{18}$ Ans.

भिन्नों का LCM निकालना

$$\text{LCM} = \frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$$

उदा.2 $\frac{1}{2}$ व $\frac{5}{8}$ का LCM ?

$$\text{LCM} = \frac{1 \text{ व } 5 \text{ का LCM}}{2 \text{ व } 8 \text{ का HCF}} \Rightarrow \frac{5}{2}$$

HCF (Highest Common Factor) महत्तम समापवर्तक

- वह सबसे बड़ी संख्या जिससे दी गयी सभी संख्याएँ पूर्णतः विभाजित हो, HCF कहलाता है।
- जैसे — 18 एवं 24 का म.स.प. 6 है।

उदा.1 HCF निकालना : दो संख्याओं का HCF भाग विधि द्वारा निकाला जाता है, तो भागफल क्रमशः 3, 4, एवं 5 प्राप्त होता है। यदि दो संख्याओं का HCF, 18 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दो संख्याएँ a एवं b हैं

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} 3 \\ c \overline{) a} 4 \\ d \overline{) c} 5 \\ \quad \times \end{array}$$

अन्तिम भाजक HCF होता है।

$$d = 18$$

$$c = 5 \times d = 5 \times 18 = 90$$

$$a = (4 \times c) + d$$

$$= (4 \times 90) + 18 = 378$$

$$b = 3a + c$$

$$= (3 \times 378) + 90 = 1134 + 90$$

$$= 1224, 378 \text{ Ans}$$

Power वाली संख्या का HCF निकालना

पहले Base का अभाज्य गुणनखण्ड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे और जो सभी में Common अभाज्य संख्या होगी, उसे गुणा के रूप में लिखेंगे और उस पर न्यूनतम Power रखेंगे।

उदा.1 $(24)^8, (36)^{12}, (18)^{16}$ का HCF निकालें।

हल $24 = (2^3 \times 3)^8 = 2^{24} \times 3^8$

$$36 = (2^2 \times 3^2)^{12} = 2^{24} \times 3^{24}$$

$$18 = (2 \times 3^2)^{16} = 2^{16} \times 3^{32}$$

$$\text{अतः म.स.प.} = 2^{16} \times 3^8$$

भिन्न का HCF निकालना

$$\text{भिन्न का HCF} = \frac{\text{अंश का HCF}}{\text{हर का LCM}}$$

उदा.1 $\frac{18}{25}, \frac{12}{7}, \frac{6}{35}$

$$\text{हल } \frac{18, 12, 6 \text{ का HCF}}{25, 7, 35 \text{ का LCM}} = \frac{6}{175}$$

किसी दो संख्याओं का जोड़ तथा ल.स.प. का म.स.प., उन संख्याओं के म.स. के बराबर होता है।

माना दो संख्याएँ x तथा y हैं, तथा उनका म.स. H है।

$$\text{अतः } x = Ha$$

$$y = Hb$$

जहाँ a तथा b परस्पर अभाज्य हैं।

x, y का $LCM = Hab$

और $x + y = H(a + b)$

अब 'a' तथा 'b' परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं, तो $(a + b)$ तथा ab भी परस्पर अभाज्य होगी। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $H(a + b)$ तथा Hab का म.स. H ही होगा, जो x तथा y का भी म.स. है।

LCM एवं HCF में Relation

$LCM \times HCF =$ दोनों संख्याओं का गुणनफल

उदा.1 दो संख्याओं का LCM एवं HCF क्रमशः 420 एवं 28 हैं। यदि एक संख्या 84 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए –

$$\text{हल दूसरी संख्या} = \frac{420 \times 28}{84} = 140$$

- जब कहा जाये कि x, y, z के लिये वह छोटी से छोटी संख्या क्या होगी जिसमें भाग देने पर r शेष बच जाये, इसके लिए उत्तर होगा x, y, z का $(LCM + r)$ ।
- वह छोटी से छोटी संख्या जिसे x, y, z से भाग करने पर शेषफल क्रमागत a, b, c हो। इसके लिये उत्तर होगा – $(x, y, z) - K$ का LCM।

अभ्यास प्रश्न

महत्तम समापवर्तक आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 84, 126, 140 का महत्तम समापवर्तक कितना है ?

उदा.2 $x^6 - 1$ और $x^4 + 2x^3 - 2x^1 - 1$ का म.स. क्या होगा ?

- (a) $x^2 + 1$ (b) $x - 1$
(c) $x^2 - 1$ (d) $x + d$

उत्तर (c)

लघुत्तम समापवर्त्य आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 15, 18, 24, 27, 36 का लघुत्तम समापवर्त्य क्या होगा ?

उदा.2 दो संख्याओं का योग 45 है। उनका अंतर योग का $\frac{1}{9}$ है, तो उनका ल.स. ज्ञात करें।

- (a) 200 (b) 250
(c) 100 (d) 150

उत्तर (c)

उदा.3 छः घण्टियाँ एक साथ बजनी आरम्भ हुई, यदि ये घण्टियाँ क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10, 12 सेकण्ड के अंतराल से बजे, तो 30 मिनट में कितनी बार ये एक साथ इक्कट्टी बजेंगी ?

- (a) 4 बार
(b) 10 बार
(c) 16 बार
(d) इनमें से कोई नहीं

भिन्नों के ल.स.प. तथा म.स.प.



प्रश्नों के हल



उदा.1 $\frac{14}{33}, \frac{42}{55}, \frac{21}{22}$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए –

उदा.2 $\frac{11}{14}, \frac{55}{42}, \frac{33}{35}, \frac{44}{63}$ का लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए –

उदा.3 तीन व्यक्ति एक 11 किमी. लम्बे वृत्ताकार पथ पर एक साथ एक ही दिशा में चलना प्रारंभ करते हैं। उनकी चाल क्रमशः 4, 5.5 एवं 8 किमी. प्रति घंटा है। वे तीनों एक साथ कितने समय बाद प्रारंभिक बिन्दु पर मिलेंगे ?

ल.स.प. तथा म.स.प. के मध्य संबंध आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 दो संख्याओं का ल.स. 225 तथा म.स. 5 है। यदि उसमें से एक संख्या 25 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 5 (b) 25
(c) 45 (d) 225

उत्तर (c)

उदा.2 दो संख्याओं का योग 36 है, इनका महत्तम समापवर्तक 3 तथा लघुत्तम समापवर्त्य 105 है, इन संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग कितना होगा ?

- (a) $\frac{2}{35}$ (b) $\frac{3}{25}$
(c) $\frac{4}{35}$ (d) $\frac{2}{25}$

उत्तर (c)

उदा.3 दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. का योग 680 है उनका ल.स., म.स. का 84 गुणा है। यदि एक संख्या 56 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 84 (b) 12
(c) 8 (d) 96

उत्तर

(d)

उदा.4 दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य क्रमशः 12 तथा 72 है, यदि इन संख्याओं का योग 60 हो, तो इनमें से छोटी संख्या निम्न में से कौन-सी है ?

- (a) 12 (b) 24
(c) 60 (d) 72

उत्तर

(b)



Toppernotes
Unleash the topper in you

4

CHAPTER

करणी व घातांक (Surds and Indices)



करणी

वे राशियाँ जिनका मूल मान ठीक-ठीक नहीं निकाला जा सके, उसे करणी कहते हैं।

- यदि a एक परिमेय संख्या है तथा m एक धन पूर्णांक है, तो a का m वाँ मूल



या $a^{\frac{1}{m}}$ या $\sqrt[m]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होगी, यहाँ पर $\sqrt[m]{a}$ एक करणी है।

जैसे $-\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादि।

- करणी के अनेक रूप हैं जैसे $-\sqrt[2]{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}, \sqrt[5]{}, \dots$
- $a^{\frac{1}{m}}$ को m वाँ घात युक्त करणी कहा जाता है।

करणियों के प्रकार

शुद्ध करणी	मिश्र करणी	सजातीय करणी	संयुग्मी करणी
वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड हो तो ऐसी करणी को शुद्ध करणी कहते हैं।	वह करणी जिसमें एकक परिमेय गुणनखण्ड के अलावा कोई भी एक परिमेय संख्या मौजूद हो। जैसे :- $4\sqrt{5}, 3\sqrt{8}, 2\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी करणियाँ जिसमें उनके अपरिमेय गुणनखण्ड एक समान हो। जैसे :- $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ आदि।	ऐसी दो पद वाली दो करणियाँ जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते हैं। जैसे :- $(2+\sqrt{8})$ व $(2-\sqrt{8})$, $(2+\sqrt{5})$ व $(2-\sqrt{5})$

जब पूरी राशि करणीगत हो

- यदि करणी में लिखी संख्या के दो क्रमागत गुणनखण्ड न हो सके तो पूरी राशि को x के बराबर मानकर दोनों पक्षों का वर्ग करके द्विघात समीकरण रूप $(ax^2 + bx + c = 0)$ में बदलेंगे।

- तब श्री धराचार्य सूत्र से $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

करणियों में संक्रियाएँ

(1) करणी का योग व अंतर

केवल सजातीय करणियों को ही आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है।

उदा. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

हल $\sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3}$

$= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= 9\sqrt{3}$

उदा. $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

हल $\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3}$

$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

(2) करणी का गुणा-भाग

करणियों का गुणा भाग तभी संभव है जब उनकी घातें समान हों।

उदा. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{4}$

हल $\sqrt[3]{2 \times 5 \times 4}$

$= \sqrt[3]{40}$

उदा. $12 \times 4^{\frac{1}{3}}$ में $3\sqrt{2}$ से भाग दो।

हल $\frac{12 \times 4^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2}} = \frac{4 \times 4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{4 \times 4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}$

$= 4 \times \left[\frac{4^2}{2^3} \right]^{\frac{1}{6}} = 4 \times \left[\frac{16}{8} \right]^{\frac{1}{6}}$

$= 4 \times 2^{\frac{1}{6}}$

करणियों के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

(2) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

(4) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

(5) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

(6) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

- (7) $\sqrt{2} = 1.41421$
 (8) $\sqrt{3} = 1.73205$
 (9) $\sqrt{5} = 2.23607$
 (10) $\sqrt{6} = 2.44949$

संयुग्मी

- ऐसी दो पद वाली करणी जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिन्ह असमान होते हैं तो ऐसी करणियों को संयुग्मी करणी कहते हैं।
- इस प्रकार की राशियों का मान ज्ञात करने के लिए हर की संयुग्मी से अंश व हर दोनों से गुणा करते हैं।

उदा. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल } \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} &= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} \\ &= \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} \\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} \\ &= 2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

करणियों की तुलना (बड़ा या छोटा)

- दिये गये करणियों में से सबसे बड़ा या छोटा निकालने के लिए हम घातांक को समान करते हैं तथा आधार की तुलना करते हैं।

उदा. $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

हल $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$ की घातें 3, 2, 3 हैं जिनका LCM = 6 हैं।

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64}$$

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2}$$

$$\text{अतः सबसे बड़ी संख्या} = \sqrt[6]{64} = \sqrt{4}$$

घातांक — किसी संख्या को उसी से जितनी बार गुणा करते हैं उतने को उस संख्या की घात कहते हैं और उस संख्या को आधार कहते हैं।

घातांक के कुछ महत्वपूर्ण नियम

- (i) $a^m = a \times a \times a \times \dots \dots m$ बार
 (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$

(iv) $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

(v) $[(a^m)^n]^l = a^{mnl}$

(vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(vii) $a^0 = 1$ {किसी भी संख्या की घात शून्य हो तो, उस पूरी राशि का मान 1 होता है।}

(viii) $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$

(ix) $a^m = b^n$

$$a = (b)^{n/m} \text{ or } b = (a)^{m/n}$$

(x) $a^m = b$ तो $a = b^{1/m}$

- यदि Power भिन्न रूप में हो तो बड़ा या छोटा value निकालना हो घात के हर का ल.स.प. लेंगे और ल.स.प. से प्रत्येक घात को गुणा करेंगे और जिसकी बड़ी value आयेगी वह बड़ा होगा और जिसकी छोटी value आएगी वह छोटा होगा।

उदा. $(2)^{\frac{1}{4}}, (3)^{\frac{1}{6}}, (4)^{\frac{1}{8}}, (8)^{\frac{1}{12}}$

हल $(2)^{\frac{1}{4} \times 24} = 2^6 = 64$

$$(3)^{\frac{1}{6} \times 24} = 3^4 = 81$$

$$(4)^{\frac{1}{8} \times 24} = 4^3 = 64$$

$$(8)^{\frac{1}{12} \times 24} = 8^2 = 64$$

अतः $3^{\frac{1}{6}}$ बड़ा है (नोट — यहाँ 4, 6, 8, 12 का ल.स.प. 24 है।)

अभ्यास प्रश्न



प्रश्नों के हल



उदा.1 $\sqrt{214 + \sqrt{107 + \sqrt{196}}}$ का मान है।

(a) 23

(b) 15

(c) 24

(d) 18

उत्तर— (b)

उदा.2 निम्न का मान क्या होगा ?

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$$

(a) 5

(b) 3

(c) 2

(d) 30

उत्तर— (b)



उदा.3 निम्न का मान ज्ञात करो ?

$$\sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$$

- (a) 2 (b) 4
(c) ± 2 (d) -2

उत्तर— (c)

उदा.4 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ का मान होगा ?

- (a) $2\sqrt{10}$ (b) 0
(c) $2\sqrt{6}$ (d) $2\sqrt{15}$

उत्तर— (b)

उदा.5 $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ का मान क्या है

- (a) 1 (b) 0
(c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{7}$

उत्तर— (b)

उदा.6 $\sqrt{2^3 \sqrt{4 \sqrt{2^3 \sqrt{4 \dots}}}}$ का मान है ?

- (a) 2 (b) 2^2
(c) 2^3 (d) 2^5

उत्तर— (a)

उदा.7 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}$ में से सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

- (a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{3}$
(c) $\sqrt[4]{4}$ (d) $\sqrt[5]{5}$

उत्तर— (b)

उदा.8 निम्नलिखित को अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें (बड़े से छोटा)।

$$\sqrt[3]{4}, \sqrt{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[4]{5}$$

- (a) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[5]{3}$
(b) $\sqrt[3]{4} > \sqrt{2} > \sqrt[5]{3} > \sqrt[4]{5}$
(c) $\sqrt{2} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{3} > \sqrt[4]{5}$
(d) $\sqrt[5]{3} > \sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{4} > \sqrt{2}$

उत्तर— (a)

उदा.9 इनमें से सबसे छोटी संख्या है।

$$\sqrt[5]{12}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt{3}$$

- (a) $\sqrt[5]{12}$ (b) $\sqrt[3]{4}$
(c) $\sqrt[4]{5}$ (d) $\sqrt{3}$

उत्तर— (c)

उदा.10 $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right)$ का वर्गमूल क्या होगा ?

- (a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
(c) $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

उत्तर— (a)

उदा.11 यदि x, y परिमेय संख्याएँ हो और $\frac{5+\sqrt{11}}{3-2\sqrt{11}} = x+y\sqrt{11}$ हो तो x और y का मान होगा ?

- (a) $x = \frac{-14}{17}, y = \frac{-13}{26}$
(b) $x = \frac{4}{13}, y = \frac{11}{17}$
(c) $x = \frac{-27}{25}, y = \frac{-11}{37}$
(d) $x = \frac{-37}{35}, y = \frac{-13}{35}$

उत्तर— (d)

उदा.12 यदि $\sqrt{50} + \sqrt{128} = \sqrt{N}$ तो N का मान क्या है ?

- (a) 26 (b) 390
(c) 338 (d) 182

उत्तर— (c)

उदा.13 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ के बराबर है ?

- (a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$
(c) 2 (d) 3

उत्तर— (c)

उदा.14 जब $(4+\sqrt{7})$ को पूर्ण वर्ग के रूप में लिखा जाता है तो वह निम्न में से किसके बराबर होगा ?

- (a) $(2+\sqrt{7})^2$ (b) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2} \right)^2$
(c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{7}+1) \right\}^2$ (d) $(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2$

उत्तर— (c)

उदा.15 व्यंजक $\sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ का मान होगा —

- (a) 3 (b) 1
(c) 8 (d) 2

उत्तर— (d)

उदा.16 यदि $\sqrt{7} = 2.6457$ और $\sqrt{3} = 1.732$ हो, तो

$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) 1.0944 (b) 1.944
(c) 1.009 (d) 1.0844

उत्तर— (a)

उदा.17 यदि $10^{0.48} = x$, $10^{0.70} = y$ और $x^2 = y^z$, तो z का लगभग मान होगा:

- (a) 1.45 (b) 1.88
(c) 2.9 (d) 3.7

उत्तर— (c)

उदा.18 यदि $5^a = 3125$, तो $5^{(a-3)}$ का मान होगा?

- (a) 25 (b) 125
(c) 625 (d) 1625

उत्तर— (a)

उदा.19 $\frac{(243)^{\frac{n}{5}} \times 3^{2n+1}}{g^n \times 3^{n-1}} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 9 (d) 9^n

उत्तर— (c)

उदा.20 यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$ तब $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ किसके बराबर होगा ?

- (a) 0 (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

उत्तर— (a)

उदा.21 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौनसी है ?

$3^{50}, 4^{40}, 5^{30}$ और 6^{20}

- (a) 3^{50} (b) 4^{40}
(c) 5^{30} (d) 6^{20}

उत्तर— (b)

उदा.22 निम्न संख्याओं में सबसे छोटा है :

$2^{250}, 3^{150}, 5^{100}, 4^{200}$

- (a) 2^{250} (b) 3^{150}
(c) 5^{100} (d) 4^{200}

उत्तर— (c)

उदा.23 निम्न में सबसे बड़ी संख्या कौन सी है ?

$\frac{4}{9}, \sqrt{\frac{9}{49}}, 0.49, (0.7)^2$

- (a) $\frac{4}{9}$ (b) $\sqrt{\frac{9}{49}}$
(c) 0.47 (d) $(0.7)^2$

उत्तर— (d)